

DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 17 giugno 2026

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici non approvate*. È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z \quad dx \, dy \, dz = r \, dr \, d\theta \, dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \\ dx \, dy \, dz = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{z^4}{(z^2 - 4)(z^2 - 9)} \, dz$$

B. Sia R un parametro fisso, $R > 0$. Si consideri il quarto di sfera $\mathcal{Q}$ dato da:

$$x, y \geq 0 \quad \text{dist} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \right) \leq R$$

Prima fare un disegno di $\mathcal{Q}$. Poi, usare le coordinate *sferiche* e calcolare la media di xyz su $\mathcal{Q}$ (ponderata dal volume).

C. Siano A e R due parametri costanti positivi. Si consideri il cono $\mathcal{C}$ definito da:

$$0 \leq z \leq A \qquad x^2 + y^2 \leq \frac{R^2 z^2}{A^2}$$

Usare le coordinate *cilindriche* e calcolare

$$\iiint_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

(Indicazione: conviene che il primo integrale da calcolare sia quello dr .)

D. Si consideri il sistema:

$$\begin{aligned} a + b &= 10 \\ a + c &= 10 \\ a + d &= 10 \\ b + c &= 10 \\ b + d &= 10 \\ c + d &= 10 \end{aligned}$$

con incognite a , b , c , e d . Trovare la soluzione del sistema in due modi: prima, con un poco di buon senso aritmetico; poi con il metodo di Gauss–Jordan. (Il primo modo è più facile e velocissimo, ma si capisce che vorrei vedere soprattutto che siete in grado di applicare il metodo di Gauss–Jordan).

1/13

$$\boxed{A} \quad \text{grado}(z^4) = 4 = \text{grado}((z^2-4)(z^2-9))$$

$$(z^2-4)(z^2-9) = z^4 - 13z^2 + 36$$

$$\begin{array}{r|l} z^4 & z^4 - 13z^2 + 36 \\ \hline z^4 - 13z^2 + 36 & 1 \\ \hline // & 13z^2 - 36 \end{array}$$

$$z^4 = 1 \cdot (z^4 - 13z^2 + 36) + (13z^2 - 36)$$

$$\frac{z^4}{(z^2-4)(z^2-9)} = 1 + \frac{13z^2 - 36}{(z^2-4)(z^2-9)}$$

$$e \quad \text{grado}(13z^2 - 36) = 2 < 4 = \text{grado}((z^2-4)(z^2-9))$$

$$(z^2-4)(z^2-9) = (z+2)(z-2)(z+3)(z-3)$$

$$\frac{13z^2 - 36}{(z+2)(z-2)(z+3)(z-3)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z+3} + \frac{D}{z-3}$$

$$\begin{aligned} 13z^2 - 36 &= A(z-2)(z+3)(z-3) \\ &\quad + B(z+2)(z+3)(z-3) \\ &\quad + C(z+2)(z-2)(z-3) \\ &\quad + D(z+2)(z-2)(z+3) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{13}$$

$$z = -2$$

$$13(-2)^2 - 36 = A(-4)(1)(-5) + 0 + 0 + 0$$

$$\hookrightarrow 52 - 36 = 20A$$

$$\hookrightarrow 16 = 20A \rightarrow A = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$z = 2 \quad 13(2^2) - 36 = 0 + B(4)(5)(-1) + 0 + 0$$

$$\hookrightarrow 52 - 36 = -20B$$

$$\hookrightarrow 16 = -20B \rightarrow B = \frac{-16}{20} = -\frac{4}{5}$$

$$z = -3 \quad 13(-3)^2 - 36 = 0 + 0 + C(-1)(-5)(-6) + 0$$

$$\hookrightarrow 117 - 36 = -30C$$

$$\hookrightarrow 81 = -30C$$

$$\hookrightarrow C = \frac{81}{-30} = -\frac{27}{10}$$

$$z = +3 \quad 13(3^2) - 36 = 0 + 0 + 0 + D(5)(1)(6)$$

$$\hookrightarrow 117 - 36 = 30D$$

$$\hookrightarrow 81 = 30D \rightarrow D = \frac{81}{30} = \frac{27}{10}$$

3/13

$$\int \frac{z^4}{(z^2-4)(z^2-9)} dz$$

$$= \int \left(1 + \frac{4}{5} \frac{1}{z+2} - \frac{4}{5} \frac{1}{z-2} - \frac{27}{10} \frac{1}{z+3} + \frac{27}{10} \frac{1}{z-3} \right) dz$$

$$= z + \frac{4}{5} \log(z+2) - \frac{4}{5} \log(z-2) - \frac{27}{10} \log(z+3) + \frac{27}{10} \log(z-3)$$

$$= z + \frac{4}{5} \log\left(\frac{z+2}{z-2}\right) + \frac{27}{10} \log\left(\frac{z-3}{z+3}\right)$$

[B] $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$$x, y \geq 0 \Leftrightarrow m \cos \theta \geq 0, m \sin \theta \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta \geq 0, \sin \theta \geq 0$$

$$\rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

4/13

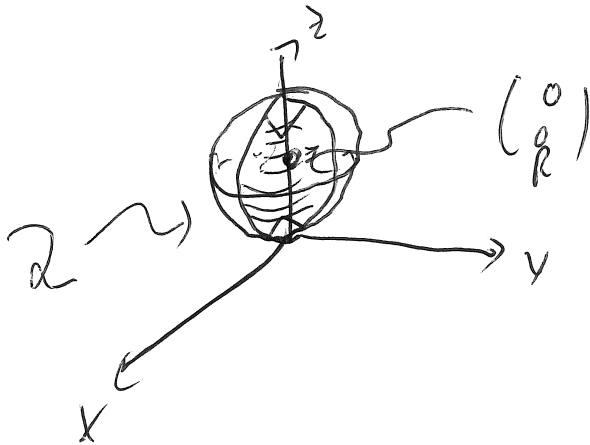
$$m \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} & \text{dist} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \right) \leq R \\ \hookrightarrow & \text{dist} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} \right)^2 \leq R^2 \\ \hookrightarrow & (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-R)^2 \leq R^2 \\ \hookrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 - 2zR + R^2 \leq R^2 \\ \hookrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 \leq 2zR \\ \hookrightarrow & m^2 \leq 2m \cos \theta R \\ \hookrightarrow & m \leq 2 \cos \theta R \end{aligned} \right\} 0 \leq m \leq 2 \cos \theta R$$

Questo è possibile solo se $\cos \theta \geq 0$,
cioè solo se il punto è nello
semispazio superiore, con $z \geq 0$.

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \pi \\ \cos \theta \geq 0 \end{aligned} \right\} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(5/13)



$$\iiint_a dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{2R \cos \theta} r \cdot r^2 \sin \theta \, dr \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{1}{3} (2R \cos \theta)^3 \sin \theta \, d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{8R^3}{3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} 1 \, d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{8R^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[-\frac{1}{4} \cos^4 \theta \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{8R^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \\ = \frac{\pi R^3}{3}$$

6/13

giusto per il volume di un quarto
della sfera di raggio R .

$$\iiint_{\Omega} x y z \, dV$$
$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{\rho=0}^{2R \cos \theta} \right) \right)$$

$$(R \sin \theta \cos \varphi) (R \sin \theta \sin \varphi) (R \cos \theta)$$

$$\cdot R^3 \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin \theta \cos \varphi \cdot \sin \theta \sin \varphi \cdot \cos \theta \right.$$
$$\cdot \sin \theta \cdot \frac{1}{6} (2R \cos \theta)^6 d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{32 R^6}{3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^3 \theta \cdot \cos^7 \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{32 R^6}{3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^7 \theta \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} d\theta$$

7/13

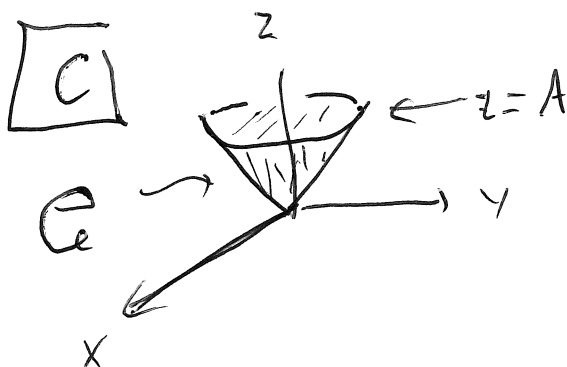
$$= \frac{32R^6}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cdot (1 - \cos^2 \theta) \cos^7 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{16R^6}{3} \left[-\frac{1}{8} \cos^8 \theta + \frac{1}{10} \cos^{10} \theta \right]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{16R^6}{3} \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right] = \frac{16R^6}{3} \cdot \frac{1}{40} = \frac{2R^6}{15}$$

$$\overline{xyz} = \frac{\iiint_V xyz \, dV}{\iiint_V 1 \, dV} = \frac{2R^6/15}{\pi R^3/3}$$

$$= \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{\pi} \cdot R^3 = \frac{2}{5\pi} \cdot R^3$$



8/13

$$x^2 + y^2 \leq \frac{R^2 z^2}{A^2} \Leftrightarrow r^2 \leq \frac{R^2 z^2}{A^2}$$

$$\Leftrightarrow r \leq \frac{Rz}{A}$$

$$\iiint_C \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{z=0}^A \left(\int_{r=0}^{Rz/A} \sqrt{r^2 + z^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. \cdot r dr \right) dz \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{z=0}^A \left[\frac{1}{3} (r^2 + z^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{Rz/A} dz$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_{z=0}^A \left(\left(\frac{Rz}{A} \right)^2 + z^2 \right)^{3/2} - (z^2)^{3/2} dz$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_{z=0}^A \left(\frac{R^2 + A^2}{A^2} z^2 \right)^{3/2} - z^3 dz$$

(9/13)

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^A \frac{(R^2 + A^2)^{3/2}}{A^3} z^3 - z^3 dz$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{(R^2 + A^2)^{3/2}}{A^3} - \frac{A^4}{4} - \frac{A^4}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{6} \left((R^2 + A^2)^{3/2} A - A^4 \right)$$

[D]

a	b	c	d	=
①	1	0	0	10
1	0	1	0	10
1	0	0	1	10
0	1	1	0	10
0	1	0	1	10
0	0	1	1	10

10/13

$$\begin{aligned} E2 &\leftarrow E2 - E1 \\ E3 &\leftarrow E3 - E1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}$$

$$E2 \leftarrow -E2$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}$$

$$\begin{aligned} E3 &\leftarrow E3 + E2 \\ E1 &\leftarrow E1 - E2 \\ E4 &\leftarrow E4 - E2 \\ E5 &\leftarrow E5 - E2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}$$

11/13

$$\underline{E3 \leftarrow -E3}$$

(1)	0	1	0	10
0	(1)	-1	0	0
0	0	(1)	-1	0
0	0	2	0	10
0	0	1	1	10
0	0	1	1	10

$$E1 \leftarrow E1 - E3$$

$$\underline{E2 \leftarrow E2 + E3}$$

$$E4 \leftarrow E4 - 2E3$$

$$E5 \leftarrow E5 - E3$$

$$E6 \leftarrow E6 - E3$$

(1)	0	0	1	10
0	(1)	0	-1	0
0	0	(1)	-1	0
0	0	0	(2)	10
0	0	0	2	10
0	0	0	2	10

12/13

$E_4 \leftarrow \frac{1}{3}E_4$

①	0	0	1	10
0	①	0	-1	0
0	0	①	-1	0
0	0	0	①	5
0	0	0	2	10
0	0	0	2	16

$E_1 \leftarrow E_1 - E_4$

$E_2 \leftarrow E_2 + E_4$

$E_3 \leftarrow E_3 + E_4$

$E_5 \leftarrow E_5 - 2E_4$

$E_6 \leftarrow E_6 - 2E_4$

a	b	c	d	=
①	0	0	0	5
0	①	0	0	5
0	0	①	0	5
0	0	0	①	5
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$\rightarrow$
 $a = 5$
 $b = 5$
 $c = 5$
 $d = 5$

13/13

Anche senza $I_8 - I_9$ si capisce
che questa è la soluzione:

Se $a = b = c = d = 5$, allora la
somma di ogni paio fra
 a, b, c , e d è $5 + 5 = 10$.