

DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 1 luglio 2026

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici non approvate*. È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad dx dy = r dr d\theta$$

$$\int \sec^3 t dt = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} t \sec t + \log(\operatorname{tg} t + \sec t))$$

A. Calcolare

$$\int \frac{u^4}{(u^2 + 1)(u^2 - 9)} du$$

B. Siano R e A due parametri positivi fissi. Sia $\mathcal{T}$ il triangolo nel piano con coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A \\ R \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} A \\ -R \end{pmatrix}$. Usare le coordinate *polari* e calcolare

$$\iint_{\mathcal{T}} \sqrt{x^2 + y^2} dA$$

C. In spazio 4-dimensionale con coordinate x, y, z , e v si usa una versione delle coordinate sferiche con coordinate r, θ_1, θ_2 , e θ_3 dove valgono queste formule:

$$v = r \cos \theta_1$$

$$z = r \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

$$x = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3$$

$$y = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3$$

$$dx dy dz dv = d\text{Vol}_4 = r^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

con $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \pi$, $0 \leq \theta_2 \leq \pi$, e $-\pi \leq \theta_3 \leq \pi$. Sia $R > 0$ un parametro positivo. Calcolare il volume 4-dimensionale della sfera 4-dimensionale data dal vincolo $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 \leq R^2$.

D. Si consideri il sistema:

$$\begin{array}{lll} a + b + c = 30 & a + c + d = 30 & b + c + e = 30 \\ a + b + d = 30 & a + c + e = 30 & b + d + e = 30 \\ a + b + e = 30 & a + d + e = 30 & c + d + e = 30 \\ & b + c + d = 30 & \end{array}$$

con incognite a, b, c, d , e e . Trovare la soluzione del sistema in due modi: prima, con un poco di buon senso aritmetico; poi con il metodo di Gauss–Jordan. (Il primo modo è più facile e velocissimo, ma si capisce che vorrei vedere soprattutto che siete in grado di applicare il metodo di Gauss–Jordan).

1/14

[A] $\text{grado}(u^4) = 4 = \text{grado}((u^2+1)(u^2-9))$

$$(u^2+1)(u^2-9) = u^4 - 8u^2 - 9$$

$$\begin{array}{r|l} u^4 & u^4 - 8u^2 - 9 \\ \hline u^4 - 8u^2 - 9 & 1 \\ \hline 8u^2 + 9 & \end{array}$$

$$u^4 = 1(u^4 - 8u^2 - 9) + (8u^2 + 9)$$

$$\frac{u^4}{u^4 - 8u^2 - 9} = 1 + \frac{8u^2 + 9}{u^4 - 8u^2 - 9}$$

$$\text{grado}(8u^2 + 9) = 2 < 4 = \text{grado}(u^4 - 8u^2 - 9)$$

$$(u^2+1)(u^2-9) = (u^2+1)(u-3)(u+3)$$

2/14

$$\frac{8u^2 + 9}{(u-3)(u+3)(u^2+1)} = \frac{A}{u-3} + \frac{B}{u+3} + \frac{C}{u^2+1} + \frac{D(2u)}{u^2+1}$$

$$8u^2 + 9 = A(u+3)(u^2+1) + B(u-3)(u^2+1) + C(u-3)(u+3) + D(2u)(u-3)(u+3)$$

$$u=3 \rightarrow 8 \cdot 3^2 + 9 = A(3+3)(3^2+1) + 0 + 0 + 0$$

$$\rightarrow 81 = 60A \rightarrow A = \frac{81}{60} = \frac{27}{20}$$

$$u=-3 \rightarrow 8(-3)^2 + 9 = 0 + B((-3)-3)((-3)^2+1) + 0 + 0$$

$$\rightarrow 81 = -60B \rightarrow B = \frac{-81}{60} = -\frac{27}{20}$$

$$8u^2 + 9 = A(u^3 + 3u^2 + u + 3)$$

$$+ B(u^3 - 3u^2 + u - 3)$$

$$+ C(u^2 - 9)$$

$$+ D(2u^3 - 18u)$$

$$\frac{3}{14}$$

$$= \frac{27}{20} (u^3 + 3u^2 + u + 3)$$

$$- \frac{27}{20} (u^3 - 3u^2 + u - 3)$$

$$+ C (u^2 - 9)$$

$$+ D (2u^3 - 18)$$

$$= (2D)u^3 + \left(\frac{81}{10} + C\right)u^2 - 18D(u) + \left(\frac{81}{10} - 9C\right)$$

$$\hookrightarrow 2D = 0 \rightsquigarrow D = 0$$

$$\frac{81}{10} + C = 8 \rightsquigarrow C = -1/10$$

$$-18D = 0 \rightsquigarrow D = 0$$

$$\frac{81}{10} - 9C = 9 \rightsquigarrow C = -1/10$$

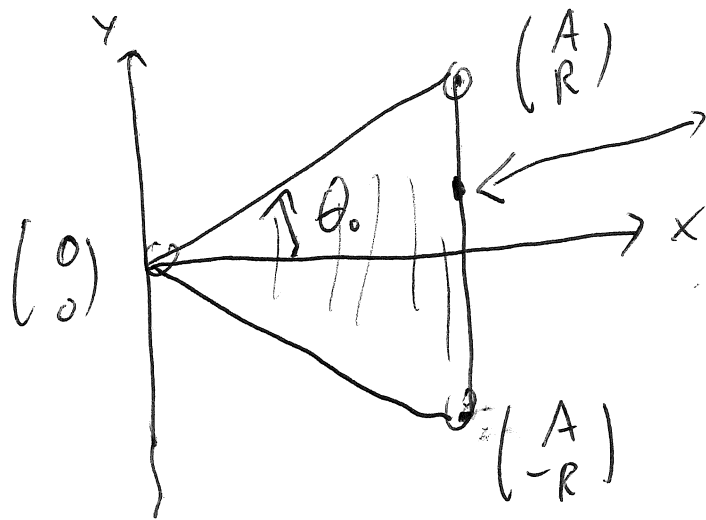
4/14

$$\int \frac{u^4}{(u-3)(u+3)(u^2+1)} du$$

$$= \int 1 + \frac{27}{20} \frac{1}{u-3} - \frac{27}{20} \frac{1}{u+3} - \frac{1}{10} \frac{1}{u^2+1} du$$

$$= \left(u + \frac{27}{20} \log(u-3) - \frac{27}{20} \log(u+3) - \frac{1}{10} \arctan(u) \right)$$

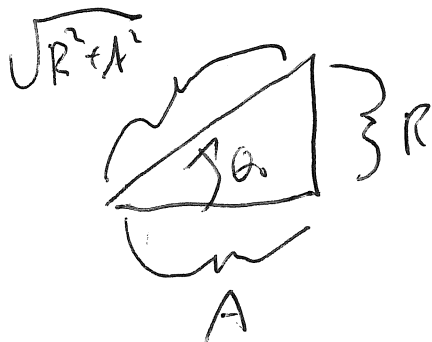
B



$$A = x = m \cos \theta$$

$$m = A / \cos \theta$$

$$= A \sec \theta$$



$$\cos \theta_0 = R / A$$

$$\sec \theta_0 = \sqrt{R^2 + A^2} / A$$

9/14

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$$

$$\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$$

$$= \int_{\theta=-\theta_0}^{+\theta_0} \left(\int_{r=0}^{A \sec \theta} r \cdot r \, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{3} (A \sec \theta)^3 \, d\theta$$

$$= \frac{A^3}{3} \int_{\theta=-\theta_0}^{\theta_0} \sec^3 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{2A^3}{3} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \sec^3 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{2A^3}{3} \left(\frac{1}{2} \tan \theta \sec \theta + \frac{1}{2} \log(\tan \theta + \sec \theta) \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta_0}$$

6/14

$$= \frac{A^3}{3} (\tan \theta_0 \sec \theta_0 + \log(\tan \theta_0 + \sec \theta_0) - \tan 0 - \sec 0 + \log(\tan 0 + \sec 0))$$

$$= \frac{A^3}{3} \left(\frac{R}{A} \cdot \frac{\sqrt{R^2 + A^2}}{A} + \log\left(\frac{R}{A} + \frac{\sqrt{R^2 + A^2}}{A}\right) - 0 \cdot 1 - \log(0 + 1) \right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} A \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + A^2} + \frac{A^3}{3} \log\left(\frac{R + \sqrt{R^2 + A^2}}{A}\right) \right)$$

[C]
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= m^2 \sec^2 \theta_1 \sec^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 \\ &\quad + m^2 \sec^2 \theta_1 \sec^2 \theta_2 \sec^2 \theta_3 \\ &= m^2 \sec^2 \theta_1 \sec^2 \theta_2 (\cos^2 \theta_3 + \sec^2 \theta_3) \\ &= m^2 \sec^2 \theta_1 \sec^2 \theta_2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= m^2 \sec^2 \theta_1 \sec^2 \theta_2 \\ &\quad + m^2 \sec^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 \\ &= m^2 \sec^2 \theta_1 (\sec^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) = m^2 \sec^2 \theta_1 \end{aligned}$$

7/14

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 + v^2 &= m^2 \sin^2 \theta_1 + m^2 \cos^2 \theta_1 \\&= m^2 (\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1) = m^2\end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 \leq R^2 \Leftrightarrow m^2 \leq R^2 \Leftrightarrow m \leq R$$

$$\text{vol}_4 = \int_{\theta_3=-\pi}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{m=0}^R m^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2$$

$$dm) d\theta_1) d\theta_2) d\theta_3$$

$$\begin{aligned}&= \int_{\theta_3=-\pi}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_1=0}^{\pi} \frac{R^4}{4} \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 \\&\quad d\theta_1) d\theta_2) d\theta_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int_{\theta_3=-\pi}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \theta_2 \\&\quad d\theta_2) d\theta_3\end{aligned}$$

$$= \int_{\theta_3=-\pi}^{\pi} \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 d\theta_3$$

8/14

$$= \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$

┌ poiché

$$\int_{\theta_1=0}^{\pi} \sin^2 \theta_1 d\theta_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{e } \int_{\theta_2=0}^{\pi} \sin \theta_2 d\theta_2 = 2 \quad \text{┐}$$

□ Si vede subito che la soluzione deve essere

$$a = b = c = d = e = 10.$$

Con questi valori, la somma di qualunque terna è

$$10 + 10 + 10 = 30$$

e l'intensità risultante è soddisfacente.

9/14

a	b	c	d	e	=	cost.
(1)	1	1	0	0		30
	1	0	1	0		30
	1	0	0	1		30
	1	0	1	0		30
	1	0	1	1		30
	1	0	0	1		30
	0	1	1	1		30
	0	1	1	0		30
	0	1	0	1		30
	0	0	1	1		30

$E2 \leftarrow E2 - E1$	(1)	1	1	0	0	30
$E3 \leftarrow E3 - E1$		0	-1	1	0	0
$E4 \leftarrow E4 - E1$		0	0	-1	0	0
$E5 \leftarrow E5 - E1$		0	-1	0	1	0
$E6 \leftarrow E6 - E1$		0	-1	0	0	1
		0	-1	-1	1	1
		0	1	1	1	0
		0	1	1	0	1
		0	1	0	1	1
		0	0	1	1	1

10/14

E2 ← E4

$$\begin{array}{cccccc} \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & \textcircled{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \end{array}$$

E2 ← -E2

$$\begin{array}{cccccc} \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 30 \end{array}$$

11/14

$E1 \leftarrow E1 - E2$
 $E5 \leftarrow E5 + E2$
 $E6 \leftarrow E6 + E2$
 $E7 \leftarrow E7 - E2$
 $E8 \leftarrow E8 - E2$
 $E9 \leftarrow E9 - E2$

①	0	1	1	0	30
0	①	0	-1	0	0
0	0	①	0	1	0
0	0	-1	1	0	0
0	0	0	-1	1	0
0	0	-1	0	1	0
0	0	1	2	0	30
0	0	1	1	1	30
0	0	0	2	1	30
0	0	1	1	1	30

$E3 \leftarrow -E3$

①	0	1	1	0	30
0	①	0	-1	0	0
0	0	①	0	-1	0
0	0	-1	1	0	0
0	0	0	-1	1	0
0	0	-1	0	1	0
0	0	1	2	0	30
0	0	1	1	1	30
0	0	0	2	1	30
0	0	1	1	1	30

12/14

$$\begin{aligned} E1 &\leftarrow E1 - E3 \\ E4 &\leftarrow E4 + E3 \\ E6 &\leftarrow E6 + E3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E7 &\leftarrow E7 - E3 \\ E8 &\leftarrow E8 - E3 \\ E10 &\leftarrow E10 - E3 \end{aligned}$$

1	0	0	0	1	30
0	1	0	-1	0	0
0	0	1	0	-1	0
0	0	0	1	-1	0
0	0	0	-1	1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	2	1	30
0	0	0	1	2	30
0	0	0	2	1	30
0	0	0	0	2	30

$$\begin{aligned} E1 &\leftarrow E1 - E4 \\ E2 &\leftarrow E2 + E4 \\ E5 &\leftarrow E5 + E4, \\ E7 &\leftarrow E7 - 2E4 \\ E8 &\leftarrow E8 - E4 \\ E9 &\leftarrow E9 - 2E4 \\ E10 &\leftarrow E10 - E4 \end{aligned}$$

1	0	0	0	2	30
0	1	0	0	-1	0
0	0	1	0	-1	0
0	0	0	1	-1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	3	30
0	0	0	0	3	30
0	0	0	0	3	30
0	0	0	0	3	30

$$E5 \leftarrow E7$$

1	0	0	0	2	30
0	1	0	0	-1	0
0	0	1	0	-1	0
0	0	0	1	-1	0
0	0	0	0	3	30
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	3	30
0	0	0	0	3	30
0	0	0	0	3	30

13/14

$$E5 \leftarrow \frac{1}{3} E5$$

1	0	0	0	2	30
0	1	0	0	-1	0
0	0	1	0	-1	0
0	0	0	1	-1	0
0	0	0	0	1	10
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	3	30
0	0	0	0	3	30
0	0	0	0	3	30

$$\begin{aligned} E1 &\leftarrow E1 - 2E5 \\ E2 &\leftarrow E2 + E5 \\ E3 &\leftarrow E3 + E5 \\ E4 &\leftarrow E4 + E5 \\ E8 &\leftarrow E8 - 3E5 \\ E9 &\leftarrow E9 - 3E5 \\ E10 &\leftarrow E10 - 3E5 \end{aligned}$$

a	b	c	d	e	= const.
1	0	0	0	0	10
0	1	0	0	0	10
0	0	1	0	0	10
0	0	0	1	0	10
0	0	0	0	1	10
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

14/14

$$\begin{aligned}a &= 10 \\ b &= 10 \\ c &= 10 \\ d &= 10 \\ e &= 10\end{aligned}$$

e 5 volte $0=0$, che vale sempre.

So può ridurre i calcoli da fare con queste 2 osservazioni:

- ① l'equazione $0=0$ può essere depennata subito
- ② quando ci sono due equazioni identici nel sistema, si può depennare una di esse.