

Analisi 2 per Ingegneria, Steger

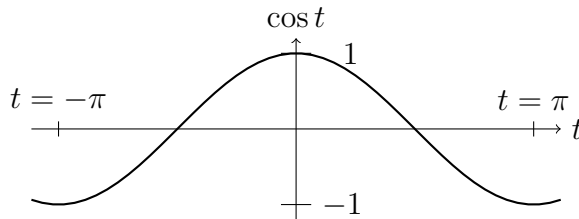
1. $\{e_n(t); n \in \mathbf{Z}\}$ È UNA BASE ORTONORMALE.

1.1. Costruiamo una successione di funzioni $h_n(t)$ con certe proprietà che saranno utili. Le diverse proprietà saranno esplicitate un po' per volta. Fra altro:

- $h_n(t + 2\pi) = h_n(t)$.
- Il valore massimo di $h_n(t)$ si trova a $t = 0$.

Cominciamo con $\cos(t) = (e^{it} + e^{-it})/2$. Si osserva che la serie di Fourier per $\cos(t)$ è una somma finita: $\cos(t) = \frac{1}{2}e^{-it} + 0e^{0it} + \frac{1}{2}e^{it}$.

Questa è una delle nostre proprietà desiderate.



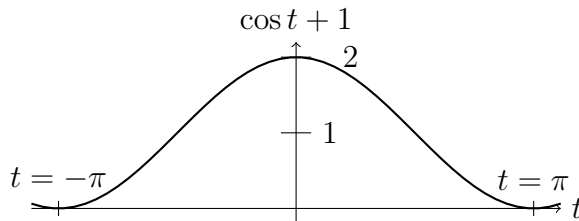
- La serie di Fourier per $h_n(t)$ è una somma finita. Perciò, $h_n(t)$ e tutte le sue derivate esistono e sono continue.

In oltre, serve

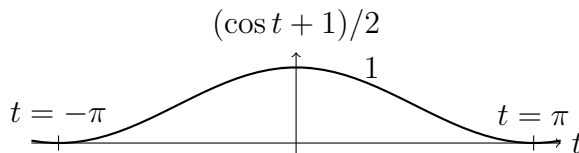
- $h_n(t) \geq 0$.

Per ottenere questo, si sposta il grafico in su da 1. Si ottiene

$$\cos(t) + 1 = \frac{e^{it} + 2 + e^{-it}}{2}$$



Per adesso, ci conviene che il valore massimo della funzione sia 1. Così dimezziamo l'altezza del grafico. L'esito è

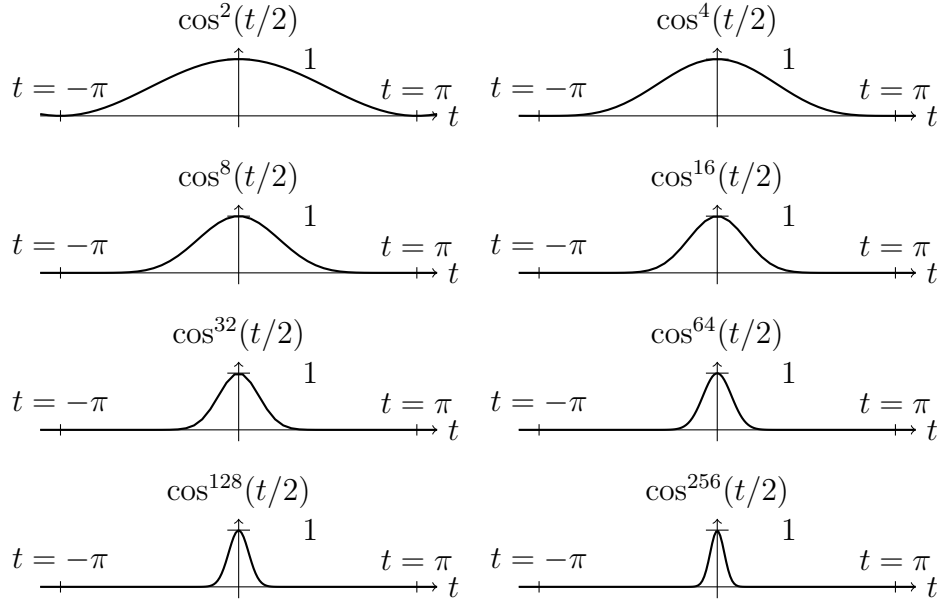


$$\begin{aligned} \frac{\cos t + 1}{2} &= \frac{e^{it} + 2 + e^{-it}}{4} = \frac{(e^{it/2})^2 + 2e^{it/2}e^{-it/2} + (e^{-it/2})^2}{4} \\ &= \left(\frac{e^{it/2} + e^{-it/2}}{2} \right)^2 = \cos^2(t/2) \end{aligned}$$

1.2. L'integrale di una qualsiasi funzione positiva corrisponde all'area sotto il suo grafico. Un'altra proprietà desiderata per le funzioni $h_n(t)$ è

- quando $n \rightarrow +\infty$ l'area sotto il grafico di $h_n(t)$ si concentra in un piccolo intervallo attorno a $t = 0$.

A questo scopo, passiamo alle *potenze* di $(\cos t + 1)/2 = \cos^2(t/2)$.



Quando $n \rightarrow +\infty$, $\cos^{2n}(0/2) = 1^{2n} = 1$ rimane costante ma per qualsiasi altro valore di t , $-\pi \leq t \leq \pi$, vale $\cos^2(t/2) < 1$ e dunque $\cos^{2n}(t/2) \rightarrow 0$. Quindi, per $n \rightarrow +\infty$, il grafico di $\cos^{2n}(t/2)$ diventa un dosso sempre più stretto attorno a $t = 0$, come si vede sopra.

1.3. Calcoliamo la serie di Fourier per $\cos^{2n}(t/2)$. Si ricordi la formula binomiale: $(A + B)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} A^k B^{2n-k}$. Perciò

$$\begin{aligned} \cos^{2n}(t/2) &= \left(\frac{e^{it/2} + e^{-it/2}}{2} \right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (e^{it/2})^k (e^{-it/2})^{2n-k} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{kit/2 + (2n-k)(-it/2)} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{(2k-2n)it/2} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{i(k-n)t} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=-n}^n \binom{2n}{n+j} e^{ijt} \end{aligned}$$

Nell'ultimo passo abbiamo posto $k = n + j$.

1.4. Si ricordi che

$$\int_{t=-\pi}^{\pi} e^{ijt} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{se } j = 0 \\ 0, & \text{se } j \neq 0 \end{cases}$$

dunque

$$\int_{t=-\pi}^{\pi} \cos^{2n}(t/2) dt = \int_{t=-\pi}^{\pi} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=-n}^n \binom{2n}{n+j} e^{ijt} dt = \frac{2\pi}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

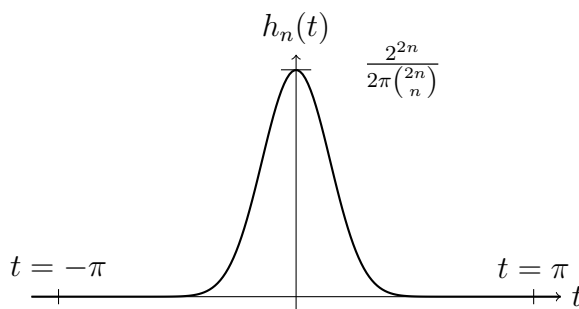
L'ultima proprietà desiderata per $h_n(t)$ è

$$\bullet \int_{t=-\pi}^{\pi} h_n(t) dt = 1.$$

Perciò, poniamo

$$\begin{aligned} h_n(t) &= \frac{2^{2n}}{2\pi \binom{2n}{n}} \cos^{2n}(t/2) = \frac{2^{2n}}{2\pi \binom{2n}{n}} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=-n}^n \binom{2n}{n+j} e^{ijt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n \frac{\binom{2n}{n+j}}{\binom{2n}{n}} e^{ijt} \end{aligned}$$

L'area sotto il grafico nel disegno è 1. Le scale sulle due asse sono diverse. Per $n \gg 1$, il dosso è molto stretto e molto alto. Riproponiamo l'elenco completo delle proprietà delle funzioni $h_n(t)$.

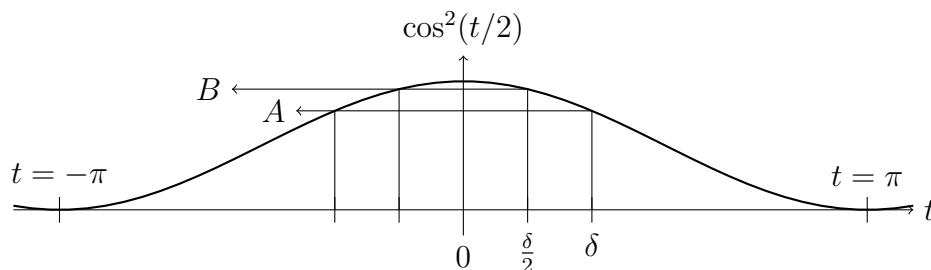


- $h_n(t + 2\pi) = h_n(t)$.
- $h_n(t) \geq 0$.
- Il valore massimo di $h_n(t)$ si trova a $t = 0$.
- La serie di Fourier per $h_n(t)$ è una somma finita. Perciò, $h_n(t)$ e tutte le sue derivate esistono e sono continue.
- $\int_{t=-\pi}^{\pi} h_n(t) dt = 1$.
- quando $n \rightarrow +\infty$ l'area sotto il grafico di $h_n(t)$ si concentra in un piccolo intervallo attorno a $t = 0$.

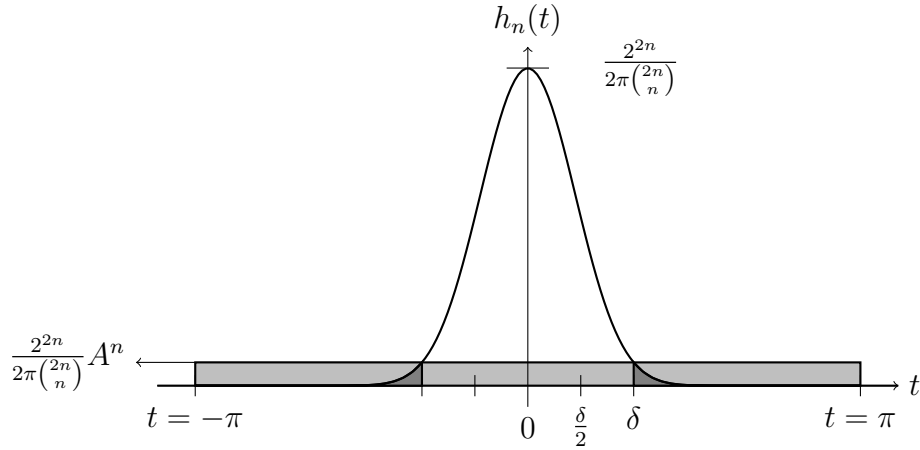
1.5. Conviene esprimere più precisamente l'ultima di quelle proprietà.

Lemma. Sia $\delta > 0$ fisso. Allora $\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} h_n(t) dt \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Poniamo $A = \cos^2(\delta/2)$ e $B = \cos^2(\delta/4)$.



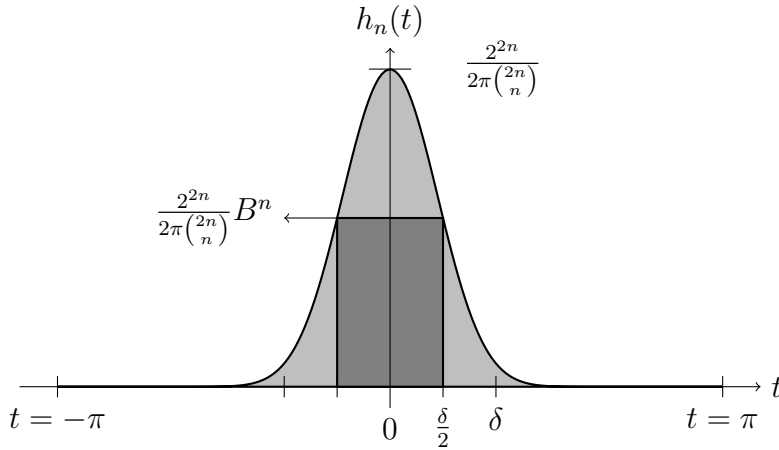
Si vede che $0 < A < B < 1$. Il seguente disegno:



dimostra che

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} h_n(t) dt \leq 2\pi \cdot \frac{2^{2n}}{2\pi \binom{2n}{n}} \cdot A^n$$

e questo:



dimostra che

$$\delta \cdot \frac{2^{2n}}{2\pi \binom{2n}{n}} \cdot B^n \leq \int_{t=-\pi}^{\pi} h_n(t) dt = 1$$

Mettendo insieme le ultime due disuguaglianze si trova:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} h_n(t) dt \leq 2\pi \cdot \frac{2^{2n}}{2\pi \binom{2n}{n}} \cdot A^n \\ &= \frac{2\pi}{\delta} \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^n \cdot \delta \cdot \frac{2^{2n}}{2\pi \binom{2n}{n}} \cdot B^n \leq \frac{2\pi}{\delta} \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^n \end{aligned}$$

e quando si passa al limite per $n \rightarrow +\infty$ si trova:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} h_n(t) dt \leq 0$$

□

1.6. A che cosa servono le funzioni $h_n(t)$?

Teorema. Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ una funzione continua a tratti che soddisfa $f(t + 2\pi) = f(t)$. Se $f(t)$ è continua a $t = 0$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t) dt = f(0)$$

Dimostrazione. Scriviamo $f(t) = f(0) + E(t)$. La continuità di $f(t)$ a $t = 0$ vuol dire che $E(t) = o(1)$ per $t \rightarrow 0$; equivalentemente, vuol dire che $\lim_{t \rightarrow 0} E(t) = 0$. Sia $M > 0$ tale che $|E(t)| \leq M$ per qualunque t .

Fissiamo un qualsiasi valore $\epsilon > 0$. Sulla base della continuità, scegliamo $\delta > 0$ tale che $|E(t)| \leq \epsilon/2$ quando $|t| \leq \delta$. Sulla base del Lemma, scegliamo $N > 0$ tale che

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} h_n(t) dt \leq \frac{\epsilon}{2M} \quad \text{per } n \geq N.$$

Risulta che

$$\begin{aligned} \int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t) dt &= \int_{t=-\pi}^{\pi} (f(0) + E(t)) h_n(t) dt \\ &= \int_{t=-\pi}^{\pi} f(0) h_n(t) dt + \int_{t=-\pi}^{\pi} E(t) h_n(t) dt \\ &= f(0) + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} E(t) h_n(t) dt + \int_{t=-\delta}^{\delta} E(t) h_n(t) dt \end{aligned}$$

Si stima il “termine d’errore” fatto dagli ultimi due integrali per $n \geq N$.

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} E(t) h_n(t) dt + \int_{t=-\pi}^{\pi} E(t) h_n(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} E(t) h_n(t) dt \right| + \left| \int_{t=-\delta}^{\delta} E(t) h_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |E(t)| h_n(t) dt + \int_{t=-\delta}^{\delta} |E(t)| h_n(t) dt \\ &\leq \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} M \cdot h_n(t) dt + \int_{t=-\delta}^{\delta} \frac{\epsilon}{2} \cdot h_n(t) dt \\ &\leq M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2} \cdot 1 = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Questo stabilisce che $\int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t) dt = f(0) + o(1)$ per $n \rightarrow +\infty$; cioè $\int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t) dt \rightarrow f(0)$ per $n \rightarrow +\infty$. $\square$

1.7. Se la serie di Fourier di $f(t)$ è $\sum_j c_j e^{ijt}$, allora

$$\begin{aligned} \int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t) dt &= \int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-n}^n \frac{\binom{2n}{n+j}}{\binom{2n}{n}} e^{ijt} dt \\ &= \sum_{j=-n}^n \frac{\binom{2n}{n+j}}{\binom{2n}{n}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) e^{ijt} dt \\ &= \sum_{j=-n}^n \frac{\binom{2n}{n+j}}{\binom{2n}{n}} c_{-j} = \sum_{j=-n}^n \frac{\binom{2n}{n-j}}{\binom{2n}{n}} c_j \end{aligned}$$

Esercizio 1. Per j fisso, completare il calcolo:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{2n}{n-j}}{\binom{2n}{n}} &= \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!n!}{(n+j)!(n-j)!} \\ &= \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-(j-1))}{(n+1)(n+2)\dots(n+j)} = \dots = 1 \end{aligned}$$

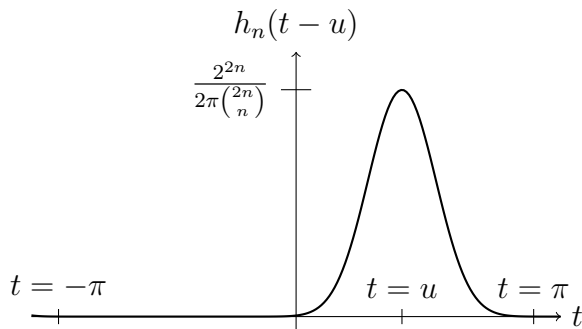
Se non si riesce, conviene tentare prima con $j = 1$, poi con $j = 2$, eccetera.

Esiste una legge che dice che il limite di una somma è uguale a la somma dei limiti. Se questa legge fosse valida anche per le somme infinite, allora si potrebbe dedurre dall'esercizio e dal calcolo sopra che $f(0) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j$.

Di fatto, quella legge non vale sempre per le somme infinite. Di fatto, esistono funzioni $f(t)$ continue a $t = 0$ per cui $\sum_j c_j$ non converge. Invece, se df/dt esiste a $t = 0$, è garantito che $\sum_j c_j = f(0)$, ma omettiamo i calcoli necessari per dimostrare quel fatto.

1.8. Cosa si fa se il valore d'interesse non è $f(0)$ ma $f(u)$? Non è difficile: basta spostare il dosso di $h_n(t)$ in modo che cade a $t = u$. L'esito di questo spostamento è la funzione $h_n(t - u)$.

Si ipotizza che $f(t)$ è continua a $t = u$ e si calcola:



$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t-u) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{s=-\pi-u}^{\pi-u} f(s+u) h_n(s) ds \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{s=-\pi}^{\pi} f(s+u) h_n(s) ds = f(0+u) = f(u) \end{aligned}$$

In quanto

$$h_n(t-u) = \sum_{j=-n}^n \frac{1}{2\pi} \frac{\binom{2n}{n+j}}{\binom{2n}{n}} e^{ij(t-u)} = \sum_{j=-n}^n \frac{1}{2\pi} \frac{\binom{2n}{n+j}}{\binom{2n}{n}} e^{ijt} e^{-iju}$$

si trova che se la serie di Fourier di $f(t)$ è $\sum_j c_j e^{ijt}$ allora

$$\int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t-u) dt = \sum_{j=-n}^n \frac{\binom{2n}{n+j}}{\binom{2n}{n}} c_{-j} e^{-iju} = \sum_{j=-n}^n \frac{\binom{2n}{n-j}}{\binom{2n}{n}} c_j e^{iju}$$

1.9. C'è un punto di fondamentale importanza in sospeso. Tutti i nostri calcoli dipendono dal fatto che il *sistema ortonormale*

$$\{e_j(t); j \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ijt}; j \in \mathbf{Z} \right\}$$

sia una *base ortonormale*. Per stabilire quel fatto, occorre stabilire che se $f(t)$ soddisfa $\langle f, e_j \rangle = 0$ per tutti gli e_j , allora f è la funzione zero dappertutto.

Dimostrazione. Sia f una tale funzione. Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ijt} dt = \langle f, e_j \rangle = 0$$

quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ijt} dt = 0$$

per ogni j . In quanto $h_n(t-u)$ si può esprimere come una serie di Fourier che è una somma finita, vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t-u) dt = 0$$

Si passa al limite per $n \rightarrow +\infty$ e si trova che $f(u) = 0$ per ogni valore u dove $f(t)$ è continua. In quanto $f(t)$ è continua a tratti, ci sono solo un numero finito di valori di t dove $f(t)$ non è continua. Vuol dire che $f(t) = 0$ con l'eccezione di quel numero finito di valori di t . Secondo la nostra convenzione, una funzione di quel tipo è da considerare identica alla funzione zero dappertutto. $\square$

2. LA FUNZIONE- δ DI DIRAC

Nella formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) h_n(t) dt = f(0)$$

si può pensare di portare il limite dentro l'integrale:

$$\int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) \right) dt = f(0)$$

Vista strettamente, questa manovra non è valida. E comunque Dirac ha capito che per molti calcoli funziona benissimo lavorare con una “funzione” che rappresenta una specie di limite:

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t)$$

e tale che

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

Questa è la *funzione- δ* di Dirac.

L’area sotto il “grafico” di $\delta(t)$ deve essere 1 poichè $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \delta(t) dt = 1$. Comunque, il “dosso” di quel “grafico” deve essere così stretto che si concentra tutto quanto sopra il punto $t = 0$. Quindi, in quanto l’“area” sotto il “dosso” vale 1, l’altezza del “dosso” deve essere infinito.

Tutto ciò è strano, e non corrisponde al vero grafico di nessuna vera funzione. Dall’altro canto, il grafico di $h_n(t)$ è un dosso, e quando $n \rightarrow +\infty$ la larghezza del dosso tende a zero, l’altezza del dosso tende all’infinito, e l’area sotto il dosso rimane costantemente 1. Quindi, le proprietà paradossale del “grafico” di $\delta(t)$ sono quelle aspettate per $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t)$.

2.1. Calcoliamo i coefficienti di Fourier di $\delta(t)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(t) e^{-ijt} dt = \frac{e^{-ij0}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

Quindi, la serie di Fourier di $\delta(t)$ è

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_j e^{ijt}$$

Si capisce che questa funzione- δ ha periodo 2π . Oltre al “dosso” che ha sopra il punto $t = 0$ ci sono “dossi” sopra tutti i punti $2\pi n$ per n intero. Dirac ha lavorato soprattutto con la funzione- δ che non è periodico e che ha un solo “dosso”. Questa versione originale è quella che si incontra più spesso.

L’equazione per $\delta(t)$ come serie di Fourier è equivalente alla prima equazione fondamentale per le serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_j c_j e^{ijt} \quad \text{dove} \quad c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{s=-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ijs} ds$$

almeno se ci mettiamo d'accordo di trattare la “funzione” $\delta(t)$ come se fosse una vera funzione. Ecco il calcolo:

$$\begin{aligned}
 \sum_j c_j e^{ijt} &= \sum_j \left(\frac{1}{2\pi} \int_{s=-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ijs} ds \right) e^{ijt} \\
 &= \int_{s=-\pi}^{\pi} f(s) \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_j e^{ijt - ijs} ds \\
 &= \int_{s=-\pi}^{\pi} f(s) \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_j e^{ij(t-s)} ds \\
 &= \int_{s=-\pi}^{\pi} f(s) \cdot \delta(t-s) ds = \int_{u=-\pi-t}^{\pi-t} f(u+t) \cdot \delta(-u) du \\
 &= \int_{u=-\pi}^{\pi} f(u+t) \cdot \delta(-u) du = \int_{u=-\pi}^{\pi} f(u+t) \cdot \delta(u) du \\
 &= f(0+t) = f(t)
 \end{aligned}$$

Al penultimo passo abbiamo usato il fatto che $\delta(-u) = \delta(u)$, che segue, ad esempio, dalla formula $\delta(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(u)$.