

Analisi 2 per Ingegneria, Steger

1. FORMULE FONDAMENTALI PER LE SERIE DI FOURIER

Si fissi un periodo $T > 0$. Si consideri lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ che sono continue a tratti e che soddisfano $f(t+T) = f(t)$. Siano $f(t)$ e $g(t)$ due funzioni di quello spazio.

$$\langle f, g \rangle = \int_{t=-T/2}^{T/2} f(t) \overline{g(t)} dt$$
$$\langle f, f \rangle = \int_{t=-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 ds$$

I coefficienti di Fourier di $f(t)$ e $g(t)$ sono, rispettivamente:

$$c_j = \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i j s/T} ds$$
$$d_j = \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} g(s) e^{-2\pi i j s/T} ds$$

Le formule fondamentali sono:

$$(1) \quad f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{2\pi i j t/T}$$
$$(2) \quad g(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j e^{2\pi i j t/T}$$
$$(3) \quad \langle f, f \rangle = \int_{t=-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = T \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j|^2$$
$$(4) \quad \langle f, g \rangle = \int_{t=-T/2}^{T/2} f(t) \overline{g(t)} dt = T \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \bar{d}_j$$

2. FORMULE FONDAMENTALI PER LA TRASFORMATTA FOURIER

Si consideri lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ che sono continue a tratti e che soddisfano

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0 \quad \int_{t=-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

Siano $f(t)$ e $g(t)$ due funzioni di quello spazio.

$$\langle f, g \rangle = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$
$$\langle f, f \rangle = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

Le trasformate di Fourier di $f(t)$ e $g(t)$ sono, rispettivamente:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{s=-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-i\omega s} ds$$

$$\hat{g}(\omega) = \int_{s=-\infty}^{+\infty} g(s)e^{-i\omega s} ds$$

Le formule fondamentali sono:

$$(5) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

$$(6) \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

$$(7) \quad \langle f, f \rangle = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

$$(8) \quad \langle f, g \rangle = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

3. ESERCIZI SULLA TRASFORMATATA DI FOURIER

3.1. I prossimi 6 esercizi rappresenta una successione naturale. Conviene farli in ordine. Si comincia con il fatto che

$$(9) \quad \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\omega)}{\omega} d\omega = \pi$$

Esercizio 1. Sia $k > 0$. A cominciare dalla formula (9) calcolare:

$$\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(k\omega)}{\omega} d\omega$$

$$\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(-\omega)}{\omega} d\omega$$

$$\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(-k\omega)}{\omega} d\omega$$

Indicazione: si usa l'integrazione per sostituzione. Gli esiti sono π , $-\pi$, e $-\pi$.

Esercizio 2. Siano k, l costanti reali diversi da zero. Calcolare

$$\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(k\omega) - \cos(l\omega)}{\omega} d\omega$$

Indicazione: si usa il fatto che il coseno è una funzione pari. La risposta è 0.

Esercizio 3. Rintracciare i passi di questo calcolo:

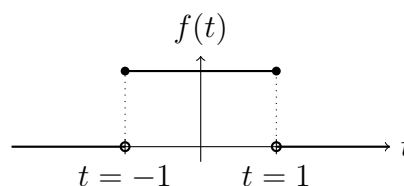
$$\begin{aligned}
 \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen}(\omega)}{\omega} \right)^2 d\omega &= \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \right)^2 \frac{1}{\omega^2} d\omega \\
 &= \frac{-1}{4} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} (e^{2i\omega} - 2 + e^{-2i\omega}) \cdot \frac{1}{\omega^2} d\omega \\
 &= -\frac{1}{4} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} (2ie^{2i\omega} - 2ie^{-2i\omega}) \cdot \frac{-1}{\omega} d\omega \\
 &= \frac{-2i \cdot 2i}{4} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\omega} - e^{-2i\omega}}{2i} \cdot \frac{1}{\omega} d\omega \\
 &= \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(2\omega)}{\omega} d\omega = \pi
 \end{aligned}$$

Poi usare le stesse tecniche per calcolare:

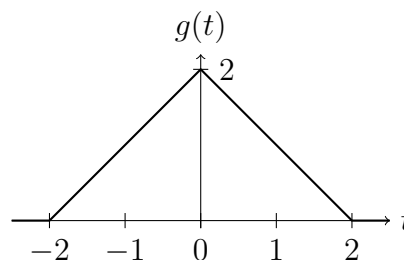
$$\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen}(\omega)}{\omega} \right)^3 d\omega \quad \text{e} \quad \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\text{sen}(\omega)}{\omega} \right)^4 d\omega$$

Indicazione: occorre utilizzare l'integrazione per parti più volte. Le risposte sono $3\pi/4$ e $2\pi/3$.

Esercizio 4. Sia $f(t)$ la funzione definita da $f(t) = 1$ se $|t| \leq 1$ e $f(t) = 0$ se $|t| > 1$. Calcolare $\hat{f}(\omega)$. Risposta: $2 \text{sen}(\omega)/\omega$. Calcolare $f(0)$ secondo formula (5) e verificare che la formula dia $f(0) = 1$. Si osservi che questo calcolo viene come deve solo se la formula (9) è valida. Perciò, questo calcolo garantisce che (9) sia valida. Calcolare ambedue i lati della formula (7) e verificare che i due esiti siano uguali. Risposta: 2. Anche questo calcolo viene come deve solo se (9) sia valida. Perciò anche questo calcolo ne garantisce la validità. Tutto ciò vale anche per molti dei calcoli dei prossimi due esercizi.



Esercizio 5. Sia $g(t)$ la funzione definita da $g(t) = 0$ se $t \leq -2$; $g(t) = 2+t$ se $-2 \leq t \leq 0$; $g(t) = 2-t$ se $0 \leq t \leq 2$; e $g(t) = 0$ se $t \geq 2$. Calcolare $\hat{g}(\omega)$. Risposta: $4(\text{sen}(\omega)/\omega)^2$. Calcolare $g(0)$ secondo formula (6) e verificare che la formula dia $g(0) = 2$. Calcolare ambedue i lati della formula (7) con g al posto di f e verificare che i due esiti siano uguali. Risposta: $16/3$. Calcolare ambedue i lati della formula (8) con l' f dell'esercizio precedente e il g di questo esercizio, e verificare che i due esiti sono uguali. Risposta: 3.



Esercizio 6. Sia $f(t)$ la stessa funzione dei due esercizi precedenti. Verificare la validità di questa identità:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\omega)e^{i\omega t} &= \frac{e^{i\omega(t+1)} - e^{i\omega(t-1)}}{2i} \\ &= \frac{\cos(\omega(1+t)) - \cos(\omega(1-t))}{2i} + \frac{\operatorname{sen}(\omega(1+t)) + \operatorname{sen}(\omega(1-t))}{2}\end{aligned}$$

Usare quell'identità e verificare che la formula (5) dia il valor giusto per $f(t)$ se $t \neq \pm 1$. Indicazione: occorre considerare separatamente i tre casi $t < -1$, $-1 < t < 1$, e $1 < t$.

3.2. Per il prossimo gruppo di 11 esercizi, molto dipende dalla formula:

$$(10) \quad \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

Esercizio 7. Sia k una costante reale. Verificare la validità di questo calcolo:

$$\begin{aligned}(11) \quad \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{kt} dt &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-k)^2/2} e^{k^2/2} dt \\ &= \int_{s=-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/2} e^{k^2/2} ds = \sqrt{2\pi} e^{k^2/2}\end{aligned}$$

Esercizio 8. Verificare che

$$\begin{aligned}\int_{t=-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt &= 1 \cdot \sqrt{2\pi} & \int_{t=-\infty}^{+\infty} t^8 e^{-t^2/2} dt &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sqrt{2\pi} \\ \int_{t=-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2/2} dt &= 1 \cdot 3 \cdot \sqrt{2\pi} & & \dots \\ \int_{t=-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2/2} dt &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

Indicazione: si usa l'integrazione per parti, tenendo conto che $\frac{d}{dt}e^{-t^2/2} = -te^{-t^2/2}$.

Esercizio 9. Verificare che:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{(2m)!} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2m} = \frac{1}{2^m m!}$$

Esercizio 10. Verificare che

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} te^{-t^2/2} dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} t^5 e^{-t^2/2} dt = \dots = 0$$

Indicazione: tutti gli integrandi sono funzioni dispari.

Esercizio 11. Sia k una costante complessa. Sulla base degli ultimi tre esercizi, verificare la validità di questo calcolo:

$$\begin{aligned} \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{kt} dt &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n t^n}{n!} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \int_{t=-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2/2} dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^{2m}}{(2m)!} \int_{t=-\infty}^{+\infty} t^{2m} e^{-t^2/2} dt \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^{2m}}{2^m m!} \cdot \sqrt{2\pi} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k^2/2)^m}{m!} \cdot \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi} e^{k^2/2} \end{aligned}$$

In quanto si può svolgere questo calcolo, il suo esito coincide per forza con quello di formula (11). Ma questo calcolo dimostra inoltre che l'esito di formula (11) vale anche quando k è complessa.

Esercizio 12. Sia $A > 0$ una costante. Calcolare:

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-A^2 t^2/2} dt \quad \text{e} \quad \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-A^2 t^2/2} e^{kt} dt$$

Indicazione: usare la sostituzione $s = At$. Risposte: $\frac{\sqrt{2\pi}}{A}$ e $\frac{\sqrt{2\pi} e^{k^2/2A^2}}{A}$.

Esercizio 13. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(t) = e^{-t^2/2}$. Risposta: $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$. Verificare che la formula (5) funziona per questo f . Indicazione: nella formula (11) si può scrivere ω al posto di t . Questo calcolo funziona solo perché formula (10) sia corretta. Perciò, dimostra che (10) è effettivamente corretta.

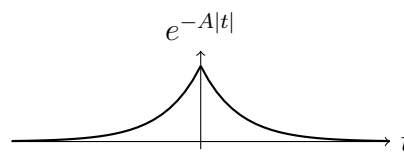
Esercizio 14. Per $f(t) = e^{-t^2/2}$, calcolare ambedue gli integrali di formula (7) e verificare che siano uguali. Risposta: $\sqrt{\pi}$.

Esercizio 15. Sia $A > 0$ costante. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(t) = e^{-A^2 t^2/2}$. Risposta: $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2A^2}/A$. Verificare che la formula (5) funziona per questo f . Calcolare ambedue gli integrali di formula (7) per questo f e verificare che siano uguali. Risposta: $\sqrt{\pi}/A$.

Esercizio 16. Sia $B > 0$ costante, e sia $g(t) = e^{-B^2 t^2/2}$. Scrivere la formula per $\hat{g}(\omega)$. Risposta: $\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2B^2}/B$. Con l' f dell'esercizio precedente e il g di questo esercizio, calcolare ambedue gli integrali di formula (8) e verificare che siano uguali. Risposta: $\sqrt{2\pi/(A^2 + B^2)}$.

Esercizio 17. Sia u una costante reale. Poniamo $f(t) = e^{-(t-u)^2/2}$ e $g(t) = e^{-(t+u)^2/2}$. Calcolare $\hat{f}(\omega)$ e $\hat{g}(\omega)$. Risposte: $\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} e^{-iu\omega}$ e $\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} e^{iu\omega}$. Calcolare ambedue gli integrali di formula (8) e verificare che siano uguali. Risposta: $\sqrt{\pi} e^{-u^2}$.

3.3. Esercizio 18. Sia $f(t) = e^{-A|t|}$. Calcolare $\hat{f}(\omega)$. Risposta: $2A/(\omega^2 + A^2)$. Ricalcolare $f(0)$ con la formula (5) e verificare che la risposta sia giusta.



Esercizio 19. Sia $g(t) = e^{-B|t|}$. Scrivere la formula per $\hat{g}(\omega)$. Risposta: $2B/(\omega^2 + B^2)$. Calcolare ambedue gli integrali di formula (8) e verificare che siano uguali. Risposta: $2/(A + B)$.