

Analisi 1 per Ingegneria, Steger

1. O-GRANDE E o-PICCOLO

1.1. Si osservi prima che la notazione “ $f(x)$ ” normalmente *non* significa il prodotto di f e x . Invece, significa il valore di una certa funzione f per l’argomento x . Ad esempio, se si pone

$$f(x) = x^3$$

allora $f(3) = 27$. Qui 3 è l’*argomento* della *funzione* f , e l’*esito* della funzione per quel argomento è 27. La funzione si chiama anche *un’applicazione* o *una mappa*.

C’è anche un’altra terminologia per questa situazione. La variabile x si chiama *variabile indipendente* e la variabile $y = f(x)$ si chiama la *variabile dipendente*, appunto perché il suo valore dipende dal valore di x .

Tutto questo vale a prescindere delle lettere: non solo $f(x)$, ma anche $f(n)$, $g(x)$, $E(x)$, $N(\epsilon)$, $\delta(\epsilon)$ eccetera.

1.2. Le notazioni di *O*-grande e *o*-piccolo sono utili per dare un’idea di quanto grande può essere un termine in un’equazione matematica. Spesso si usano per un termine d’errore, e l’idea è di dare un’idea di quanto è piccolo quel termine, senza essere troppo preciso.

Si consideri l’approssimazione $(n^3 + 1)^{1/3} \approx n$ per $n \gg 1$. Se scriviamo

$$(n^3 + 1)^{1/3} = n + E(n) \quad (\text{quindi } E(n) = (n^3 + 1)^{1/3} - n)$$

allora $E(n)$ rappresenta l’errore nell’approssimazione. Esperimenti numerici fanno vedere che $|E(n)| \leq 1/n^2$ quando n è grande. In questo caso la notazione *O*-grande si usa così:

$$E(n) = O(1/n^2) \quad \text{oppure} \quad (n^3 + 1)^{1/3} = n + O(1/n^2)$$

per $n \rightarrow +\infty$. In queste equazioni, il termine $O(1/n^2)$ sta per una quantità che non conosciamo in dettaglio, ma che non è più grande di $1/n^2$, con un’eventuale costante di proporzionalità.

1.3. Quand’è che si può scrivere $O(1/x^2)$ al posto di $E(x)$? Per definizione:

$$E(x) = O(1/x^2) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

se esistono costanti N e C tale che

$$|E(x)| \leq C \cdot 1/x^2 \quad \text{per } x \geq N$$

Si scrive $|E(x)|$ perché vogliamo limitare la grandezza di $E(x)$ anche quando il suo segno è negativo.

Si osserva che $2/x^2 = O(1/x^2)$ e anche $4/x^2 = O(1/x^2)$, ma che questo *non* vuol dire che $2/x^2 = 4/x^2$. La notazione *O*-grande si usa per descrivere quanto dev’essere piccolo il termine, ma nasconde la natura esatta di quel termine. A proposito, anche $0 = O(1/x^2)$, ma questo vuol dire solo che un termine d’errore che si azzerà è più piccolo di $1/x^2$.

1.4. Naturalmente, si può considerare anche le notazioni $O(1/x^3)$, $O(x)$, $O(1)$, $O(e^{-x})$ eccetera. Per trattare simultaneamente tutti questi casi, si discute la notazione $O(f(x))$ dove f è una qualsiasi funzione di x , tendenzialmente una funzione con valori positivi.

Si scrive

$$(1) \quad E(x) = O(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

se esistono costanti N e C tale che

$$(2) \quad |E(x)| \leq Cf(x) \quad \text{per } x \geq N$$

Questa mette un limite sulla possibile grandezza di $E(x)$ quando x è grande e positiva.

E se x è grande e negativa? Si scrive

$$(3) \quad E(x) = O(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

se esistono costanti N e C tale che

$$(4) \quad |E(x)| \leq Cf(x) \quad \text{per } x \leq -N$$

E se x è grande, ma di segno non determinato? Si scrive

$$(5) \quad E(x) = O(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

se esistono costanti N e C tale che

$$(6) \quad |E(x)| \leq Cf(x) \quad \text{per } |x| \geq N$$

Si può anche trattare il caso che x è piccolo, vicino a zero. Si scrive

$$(7) \quad E(x) = O(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

se esistono costanti N e $\delta > 0$ tale che

$$(8) \quad |E(x)| \leq Cf(x) \quad \text{per } |x| \leq \delta$$

Se vogliamo considerare solo valori di x che sono positivi, ma piccoli, scriviamo

$$(9) \quad E(x) = O(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow 0+$$

che vuol dire che esistono costanti N e $\delta > 0$ tale che

$$(10) \quad |E(x)| \leq Cf(x) \quad \text{per } 0 < x < \delta$$

Altrettanto per valori negativi, dove si scrive $x \rightarrow 0-$.

A proposito, se $f(x)$ ha valori negativi, la disuguaglianza va modificata: $|E(x)| \leq C|f(x)|$.

Esercizio 1. Controllare che

$$x^A = O(x^B) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad \text{se } A \leq B$$

ma

$$x^A = O(x^B) \quad \text{per } x \rightarrow 0+ \quad \text{se } A \geq B$$

Esercizio 2. Cosa significa $E(x) = O(1)$?

1.5. Può darsi che vogliamo considerare valori di x che sono vicini ad un dato valore $x = a$. Effettivamente, studiare valori piccoli equivale a studiare valori vicini a $x = 0$.

Si scrive

$$(11) \quad E(x) = O(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow a$$

se esistono costanti N e $\delta > 0$ tale che

$$(12) \quad |E(x)| \leq C f(x) \quad \text{per } |x - a| \leq \delta$$

e si scrive

$$(13) \quad E(x) = O(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow a+$$

se esistono costanti N e $\delta > 0$ tale che

$$(14) \quad |E(x)| \leq C f(x) \quad \text{per } a < x < a + \delta$$

e infine si scrive

$$(15) \quad E(x) = O(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow a-$$

se esistono costanti N e $\delta > 0$ tale che

$$(16) \quad |E(x)| \leq C f(x) \quad \text{per } a - \delta < x < a$$

1.6. Se $x \rightarrow +\infty$ si dice che x tende a più infinito. Vuol dire che ci interessano valori di x che sono grandi e positivi. Altrettanto, se $x \rightarrow a$ si dice che x tende ad a . Vuol dire che ci interessano valori di x che sono molto vicini ad a .

Per il resto di questo foglio, non importa particolarmente a dove x tende. Per essere concreto, mettiamo che $x \rightarrow +\infty$, ma tutto vale anche per gli altri casi.

1.7. Ci serve la *disuguaglianza triangolare*, che vale per numeri reali o complessi A e B .

$$(17) \quad |A + B| \leq |A| + |B|$$

Un caso di disuguaglianza stretta sarebbe $|-15 + 8| = 7 < |-15| + |8|$; un caso complesso sarebbe $|-15 + 8i| = 17 < 23 = |-15| + |8i|$; un caso di uguaglianza sarebbe $|-15 - 8| = 23 = |-15| + |-8|$. Se si mette $A + B$ al posto di A e $-B$ al posto di B , si ottiene

$$|(A + B) + (-B)| \leq |A + B| + |-B| = |A + B| + |B|$$

cioé $|A| \leq |A + B| + |B|$, cioè

$$(18) \quad |A + B| \geq |A| - |B|$$

Insieme (17) e (18) dicono

$$(19) \quad |A| - |B| \leq |A + B| \leq |A| + |B|$$

Vuol dire che quando, ad un dato numero A , si aggiunge un secondo termine B , il modulo non può andare né su né giù da più di $|B|$. Esempio dove va giù: $|-4 + 3| = 1 = |-4| - |3|$. Esempio dove va su: $|-4 - 3| = 7 = |-4| + |-3|$. Esempio intermedio: $|-4 + 3i| = 5$.

1.8. Supponiamo che vale

$$p(x) = q(x) + O(f(x)) + O(f(x))$$

Cosa vuol dire? Effettivamente, vuol dire che ci sono due termini d'errore:

$$p(x) = q(x) + E_1(x) + E_2(x)$$

ciascuno dei quali può essere sostituito con $O(f(x))$. Quindi, esistono costanti N_1, C_1, N_2, C_2 tale che

$$|E_1(x)| \leq C_1 f(x) \quad \text{se } x > N_1 \quad |E_2(x)| \leq C_2 f(x) \quad \text{se } x > N_2$$

Ma in quel caso (con l'uso della disuguaglianza (17))

$$|E_1(x) + E_2(x)| \leq |E_1(x)| + |E_2(x)| \leq C_1 f(x) + C_2 f(x) = (C_1 + C_2) f(x)$$

per $x \geq N = \max(N_1, N_2)$. Perciò, mettendo $C = C_1 + C_2$, vediamo che $E_1(x) + E_2(x) = O(f(x))$. Tornando all'equazione di partenza, abbiamo

$$p(x) = q(x) + O(f(x))$$

In breve, abbiamo dimostrato che

$$(20) \quad O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$$

Sembra strano, ma corrisponde al fatto che qualsiasi costante di proporzionalità va bene nella definizione di $O(f(x))$.

Esercizio 3. Dimostrare $O(f(x))O(g(x)) = O(f(x)g(x))$.

Esercizio 4. Per $D > 0$ costante, dimostrare che $D \cdot O(f(x)) = O(f(x))$.

Esercizio 5. Dimostrare che $O(O(f(x))) = O(f(x))$, cioè dimostrare che se $g(x) = O(f(x))$ e $E(x) = O(g(x))$, allora $E(x) = O(f(x))$.

Esercizio 6. Dimostrare che $(O(f(x)))^2 = O(f(x)^2)$.

Esercizio 7. Dimostrare che per qualsiasi esponente $A > 0$, vale $(O(f(x)))^A = O(f(x)^A)$.

Esercizio 8. Dimostrare che

$$\frac{20x^5 + 30x^3 + 40x}{x^3 - 50x^2 - 60} = O(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

e che

$$\frac{20x^5 + 30x^3 + 40x}{x^3 - 50x^2 - 60} = O(x) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

1.9. Adesso passiamo alla notazione del o -piccolo. Ad esempio, si può scrivere

$$x^2 = o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

Vuol dire che quando x è grande, x^2 è trascurabile rispetto ad x^3 . Più precisamente, per una piccola costante $\epsilon > 0$, ad esempio $\epsilon = 1/100$, deve valere

$$|x^2| \leq \epsilon x^3 = x^3/100$$

quando x è grande. Effettivamente, questa disuguaglianza vale quando $x \geq 100$. Quindi, $|x^2|$ non è più grande della centesima parte di x^3 , quindi è trascurabile rispetto a x^3 .

O forse no: dipende dalla situazione. Può darsi che ci serve la stessa disuguaglianza con un valore più piccolo di ϵ , ad esempio $\epsilon = 1/1000$. Effettivamente, $|x^2| \leq x^3/1000$, se x è sufficientemente grande, specificamente, se $x \geq 1000$.

1.10. Ecco la precisa definizione dalla notazione o -piccolo. Si scrive

$$(21) \quad E(x) = o(f(x)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

se per ogni valore di $\epsilon > 0$ esiste una costante $N = N(\epsilon)$ tale che

$$(22) \quad |E(x)| \leq \epsilon f(x) \quad \text{per } x \geq N(\epsilon)$$

L'idea è che abbiamo una garanzia che $E(x)$ è arbitrariamente piccolo in rapporto a $f(x)$, ma solo quando il valore di x è grande abbastanza. Grande abbastanza significa $x \geq N(\epsilon)$. È fondamentale qui che il valore di N varia secondo il valore di ϵ .

Esercizio 9. Si consideri la possibilità che la disuguaglianza

$$|E(x)| \leq \epsilon x^3 \quad \text{per } x \geq N$$

vale per ogni valore di $\epsilon > 0$, con una costante N che *non* varia secondo il valore di ϵ . Sotto quali circostanze questa possibilità si verifica?

Esercizio 10. Controllare che

$$x^A = o(x^B) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad \text{se } A < B$$

ma

$$x^A = O(x^B) \quad \text{per } x \rightarrow 0+ \quad \text{se } A > B$$

Esercizio 11. Cosa significa $E(x) = o(1)$?

1.11. Se $E(x) = o(f(x))$, allora vale anche $E(x) = O(f(x))$. Basta scegliere $\epsilon = 1$ e trovare $N = N(1)$ tale che

$$|E(x)| \leq 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{per } x \geq N(1)$$

Insomma, se $E(x)$ è trascurabile in rapporto ad $f(x)$, in particolare è più piccolo di $f(x)$. Risulta che se abbiamo un'equazione tipo $p(x) = q(x) + o(f(x))$, sappiamo altrettanto che $p(x) = q(x) + O(f(x))$; possiamo sostituire $o(f(x))$ con $O(f(x))$.

La sostituzione inversa non è valida. Ad esempio $10x^2 = O(x^2)$, ma se tentiamo di convertire questa in $10x^2 = o(x^2)$, otteniamo il falso.

In breve si scrive

$$(23) \quad o(f(x)) = O(f(x))$$

ma occorre capire che questa “uguaglianza” non segue le solite regole per le uguaglianze matematiche: è unidirezionale. Se possiamo scrivere $o(f(x))$ per un termine $E(x)$, è anche valido scrivere $O(f(x))$, ma non vice versa.

1.12. Supponiamo che

$$p(x) = q(x) + O(o(f(x))) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

L'espressione $o(f(x))$ sta per una funzione $g(x)$ che soddisfa $g(x) = o(f(x))$. La nostra equazione significa:

$$p(x) = q(x) + O(g(x)) \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

cioè

$$p(x) = q(x) + E(x) \quad \text{dove } E(x) = O(g(x))$$

Poiché $E(x) = O(g(x))$, sappiamo che esistono costanti C e N_1 tale che

$$|E(x)| \leq C|g(x)| \quad \text{se } x \geq N_1$$

Fissiamo un valore $\epsilon > 0$. Poiché $g(x) = o(f(x))$, sappiamo che esiste una costante $N_2 = N_2(\epsilon)$ tale che

$$|g(x)| \leq \epsilon f(x) \quad \text{per } x \geq N_2(\epsilon)$$

Quindi

$$|E(x)| \leq C|g(x)| \leq C(\epsilon f(x)) = (C\epsilon)f(x)$$

per $x \geq N = \max(N_1, N_2(\epsilon))$.

Quasi, quasi, questo dice che $E(x) = o(f(x))$. Comunque la costante che moltiplica $f(x)$ non è ϵ , ma $C\epsilon$. Di fatto, non c'è problema, in quanto possiamo scegliere $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, e questo ci permette di arrangiare che anche $C\epsilon$ sia arbitrariamente piccolo.

Ecco come va. Fissiamo il valore $\epsilon > 0$, e troviamo $N_2 = N_2(\epsilon/C)$ tale che

$$|g(x)| \leq (\epsilon/C)f(x) \quad \text{per } x \geq N_2(\epsilon/C)$$

Quindi

$$|E(x)| \leq C|g(x)| \leq C((\epsilon/C)f(x)) = \epsilon f(x)$$

per $x \geq N = \max(N_1, N_2(\epsilon/C))$.

La conclusione è che $E(x) = o(f(x))$, quindi

$$p(x) = q(x) + o(f(x))$$

In formulazione conciso, ciò che abbiamo visto è che

$$(24) \quad O(o(f(x))) = o(f(x))$$

Esercizio 12. Per $D > 0$ costante, dimostrare che $D \cdot o(f(x)) = o(f(x))$.

Esercizio 13. Dimostrare che $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$.

Esercizio 14. Dimostrare che $o(f(x))O(g(x)) = o(f(x)g(x))$.

Esercizio 15. Dimostrare che $o(O(f(x))) = o(f(x))$, cioè dimostrare che se $g(x) = O(f(x))$ e $E(x) = o(g(x))$, allora $E(x) = o(f(x))$.

Esercizio 16. Dimostrare che per qualsiasi esponente $A > 0$ vale $(o(f(x)))^A = o(f(x)^A)$.

1.13. Per il seguente, è necessario evitare l'insolito caso che $f(x) = 0$. Si consideri l'espressione $f(x) + o(f(x))$, che sta per $f(x) + E(x)$ con $E(x) = o(f(x))$. Fissiamo $\epsilon = 1/2$ e scegliamo $N = N(1/2)$ tale che

$$|E(x)| \leq 1/2 \cdot |f(x)| \quad \text{per } x \geq N(1/2)$$

Allora per $x \geq N(1/2)$

$$|f(x) + E(x)| \geq |f(x)| - |E(x)| \geq |f(x)| - 1/2 \cdot |f(x)| = 1/2 \cdot |f(x)|$$

dove abbiamo applicato la disuguaglianza (18)). Quindi

$$\left| \frac{1}{f(x) + E(x)} \right| \leq 2 \left| \frac{1}{f(x)} \right| = O\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

La conclusione è:

$$(25) \quad \frac{1}{f(x) + o(f(x))} = O\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

Esercizio 17. Dimostrare che per x sufficientemente grande

$$|f(x) + E(x)| \geq 0,99 \cdot |f(x)|$$

Esercizio 18. Dimostrare che

$$\frac{O(g(x))}{f(x) + o(f(x))} = O\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

1.14. Concludiamo con un riassunto di (alcune) delle regole che valgono per O -grande e o -piccolo. In ciascun caso, il senso è che un termine che può essere descritto con l'espressione *a sinistra* può essere descritto anche con l'espressione *a destra* ma non necessariamente vice versa. Qui D e A stanno per costanti positive.

$O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$	$o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$
$D \cdot O(f(x)) = O(f(x))$	$D \cdot o(f(x)) = o(f(x))$
$O(f(x))^A = O(f(x)^A)$	$o(f(x))^A = o(f(x)^A)$
$O(f(x)) - O(f(x)) = O(f(x))$	$o(f(x)) - o(f(x)) = o(f(x))$
$O(f(x))O(g(x)) = O(f(x)g(x))$	$o(f(x))O(g(x)) = o(f(x)g(x))$
	$o(f(x)) = O(f(x))$
$O(o(f(x))) = o(f(x))$	$o(O(f(x))) = o(f(x))$
$\frac{1}{f(x) + o(f(x))} = O\left(\frac{1}{f(x)}\right)$	$\frac{O(g(x))}{f(x) + o(f(x))} = O\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)$

Si osservi che $O(f(x)) - O(f(x)) \neq 0$, poiché i due termini descritti come $O(f(x))$ possono essere diversi: $10x^2 = O(x^2)$ e $5x = O(x^2)$,

ma $10x^2 - 5x \neq 0$. Comunque, vale sempre $O(f(x)) - O(f(x)) = O(f(x)) + (-1)O(f(x)) = O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$.