

Analisi 2 per Ingegneria, Steger

1. FORMULE CHE SARANNO USATE

Tutte queste formule devono finire o in testa o su un formulario.

1.1. Il coniugato complesso. Conviene avere le formule per il coniugato complesso disponibile in testa, in quanto dipendono da pochi principi semplici e naturali. L'idea di base è che il coniugato complesso scambia i con $-i$, e questo si può fare o prima o dopo qualsiasi altro calcolo.

Se $z = p + iq$ con $p, q \in \mathbf{R}$ allora

$$(1) \quad \bar{z} = p - iq$$

$$(2) \quad \bar{\bar{p}} = p \quad \overline{iq} = -iq \quad \bar{\bar{z}} = z$$

$$(3)$$

$$\operatorname{Re}(z) = p = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = q = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

$$(4) \quad |z|^2 = p^2 + q^2 = (p + iq)(p - iq) = z\bar{z}$$

$$(5) \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{p - iq}{p^2 + q^2}.$$

Per $z, z' \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$ valgono

$$(6) \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad \overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$$

$$(7) \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'} \quad \overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z'} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n.$$

Ad esempio, se $z = p + iq$ e $z' = p' + iq'$, allora $\bar{z}\bar{z'} = (p - iq)(p' - iq') = (pp' - qq') - i(pq' + qp') = \overline{(pp' - qq') + i(pq' + qp')} = \overline{zz'}$.

Se $z_n \in \mathbf{C}$ allora

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{z}_n = \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n} \quad \sum_{n \geq 1} \bar{z}_n = \overline{\sum_{n \geq 1} z_n}$$

quando i limiti e/o le somme esistono. Per la seconda formula si nota che $\sum_{n \geq 1} \bar{z}_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq n \leq N} \bar{z}_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \overline{\sum_{1 \leq n \leq N} z_n} = \overline{\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq n \leq N} z_n} = \overline{\sum_{n \geq 1} z_n}$. In particolare

$$(9) \quad \overline{e^z} = \overline{\sum_{n \geq 0} z^n/n!} = \sum_{n \geq 0} \overline{z^n/n!} = \sum_{n \geq 0} \bar{z}^n/n! = e^{\bar{z}}$$

onde per $t \in \mathbf{R}$

$$(10) \quad |e^{it}|^2 = e^{it} \overline{e^{it}} = e^{it} e^{-it} = e^{it-it} = e^0 = 1.$$

Se $f = f(t)$ è una funzione complessa e se $a, b \in \mathbf{R}$ allora

$$(11) \quad \overline{\int_{t=a}^b f(t) dt} = \overline{\lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n f(t_n) \Delta t_n} \\ = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \overline{\sum_n f(t_n) \Delta t_n} = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n \overline{f(t_n)} \Delta t_n = \int_{t=a}^b \overline{f(t)} dt.$$

1.2. Gli integrali. Queste formule dovrebbero già essere in testa da Analisi Matematica 1, ma se no ...

Siano $f = f(t)$, $F = F(t)$, $u = u(t)$, $U = U(t)$, $v = v(t)$, $V = V(t)$ funzioni complesse di una variabile reale t con $f = dF/dt$, $u = dU/dt$, e $v = dV/dt$. Inoltre, siano $a, b \in \mathbf{R}$. Scambio dei limiti d'integrazione:

$$(12) \quad \int_{t=a}^b f(t) dt = F(t) \Big|_{t=a}^b = F(b) - F(a)$$

$$(13) \quad \int_{t=b}^a f(t) dt = F(t) \Big|_{t=b}^a = F(a) - F(b) = - F(t) \Big|_{t=a}^b = - \int_{t=a}^b f(t) dt .$$

L'integrazione per parti:

$$(14) \quad \int_{t=a}^b u(t)V(t) dt = U(t)V(t) \Big|_{t=a}^b - \int_{t=a}^b U(t)v(t) dt .$$

La sostituzione: se si scrive $t = t(s)$ per una nuova variabile reale s , allora

$$(15) \quad \int_{t=t(a)}^{t(b)} f(t) dt = F(t(b)) - F(t(a)) = \int_{s=a}^b f(t(s)) \frac{dt}{ds} ds ,$$

o in breve $dt = \frac{dt}{ds} ds$.

1.3. Le formule di Eulero. Per $t \in \mathbf{R}$

$$(16) \quad e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$(17) \quad \cos t = \operatorname{Re} e^{it} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \sin t = \operatorname{Im} e^{it} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} .$$

In particolare:

$$(18) \quad e^{2\pi i} = 1 \quad e^{\pm \pi i} = -1 \quad e^{\pm \pi i/2} = \pm i$$

e

$$(19) \quad e^{\pi i/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad e^{\pi i/6} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \quad e^{\pi i/3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} .$$

Siano $s, t \in \mathbf{R}$. Da (16) si deduce

$$(20) \quad \begin{aligned} \cos(s+t) + i \sin(s+t) &= e^{i(s+t)} = e^{is+it} = e^{is} e^{it} \\ &= (\cos s + i \sin s)(\cos t + i \sin t) \\ &= (\cos s \cos t - \sin s \sin t) + i(\cos s \sin t + \sin s \cos t) . \end{aligned}$$

1.4. Le funzioni periodiche. Sia $f(t)$ una funzione complessa di una variabile reale t . Spesso t rappresenta il *tempo*. Se $T > 0$ è costante e se $f(t+T) = f(t)$ per ogni t allora si dice che f sia *periodico con periodo* T . In questo caso

$$\begin{aligned} f(t+2T) &= f(t+T+T) = f(t+T) = f(t) , \\ f(t+3T) &= f(t+2T+T) = f(t+2T) = f(t) , \end{aligned}$$

ecc. Dunque f è periodico anche con periodo $2T$, con periodo $3T$, ecc. Il periodo T corrisponde alla *frequenza* $\nu = 1/T$ e alla *frequenza angolare* $\omega = 2\pi/T$.

Per $j \in \mathbf{Z}$

$$(21) \quad e^{2\pi i j(t+T)/T} = e^{2\pi i j t/T} e^{2\pi i j} = e^{2\pi i j t/T} (e^{2\pi i})^j = e^{2\pi i j t/T} 1^j = e^{2\pi i j t/T}$$

onde $e^{2\pi i j t/T}$ è periodico con periodo T .

L'integrale su un periodo (un intervallo di lunghezza T) non dipende da dove si comincia:

$$(22) \quad \int_{t=0}^T f(t) dt = \int_{t=-T/2}^{T/2} f(t) dt = \int_{t=t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

per qualsiasi $t_0 \in \mathbf{R}$.

Se $F(t)$ è periodico con periodo T e se $f = dF/dt$, allora

$$(23) \quad \int_{t=t_0}^{t_0+T} f(t) dt = F(t) \Big|_{t=t_0}^{t_0+T} = F(t_0 + T) - F(t_0) = 0 ,$$

ad esempio per $j \in \mathbf{Z}$, $j \neq 0$

$$(24) \quad \int_{t=t_0}^{t_0+T} e^{2\pi i j t/T} dt = \left[\frac{e^{2\pi i j t/T}}{2\pi i j/T} \right]_{t=t_0}^{t_0+T} = 0 .$$

1.5. Le somme scritte con Σ -grande. Queste sono note come *sommatorie*, ma una sommatoria non è altro che una somma scritta con una notazione che è spesso più leggibile e più compatto. Anche qui, se si riesce a capire i principi si può fare a meno di memorizzare le formule ad uno ad uno. Molte delle formule non sono altro che riscritture di formule imparate alla scuola media.

In tutte queste somme i termini z_j e z'_j sono numeri complessi. Le formule funzionano ugualmente se i termini sono numeri reali, vettori reali o complessi, funzioni reali o complesse, ecc. Gli indici j , k , e l e i limiti m e n sono interi; i limiti possono essere anche $\pm\infty$, ma in questo caso si scrive, ad esempio $0 \leq j < +\infty$, e si omette il presunto termine $z_{+\infty}$.

$$(25) \quad \sum_{m \leq j \leq n} z_j = z_m + z_{m+1} + \cdots + z_n = \sum_{m \leq k \leq n} z_k = \sum_{m \leq l \leq n} z_l$$

— la somma non cambia se si cambia la lettera usata per l'indice.

Riorganizzazione della somma di due somme:

$$(26) \quad \sum_{m \leq j \leq n} z_j + \sum_{m \leq j \leq n} z'_j = \sum_{m \leq j \leq n} (z_j + z'_j) .$$

Un fattore comune a :

$$(27) \quad \sum_j (a z_j) = a \sum_j z_j .$$

Il prodotto di due somme:

$$(28) \quad \left(\sum_j z_j \right) \left(\sum_k z'_k \right) = \sum_{j,k} (z_j z'_k) ,$$

la solita somma di tutti i possibili prodotti di un termine della prima somma e un termine della seconda. (Occorre un modo di moltiplicare

z_j con z'_k . Ad esempio se $z_j \in \mathbf{C}^2$ e $z'_k \in \mathbf{C}^3$, formula (28) non ha senso nè a sinistra nè a destra).

Spostamento dell'indice, $j = j_0 + k$:

$$(29) \quad \sum_{m \leq j \leq n} z_j = z_m + z_{m+1} + \cdots + z_n = \sum_{m \leq j_0+k \leq n} z_{j_0+k} = \sum_{m-j_0 \leq k \leq n-j_0} z_{j_0+k} .$$

Negazione dell'indice, $j = -k$:

$$(30) \quad \sum_{m \leq j \leq n} z_j = z_m + z_{m+1} + \cdots + z_n = \sum_{m \leq -k \leq n} z_{-k} = \sum_{-n \leq k \leq -m} z_{-k} .$$

In formule (29) e (30), se i limiti all'inizio sono $\pm\infty$, anche alla fine sono $\pm\infty$.

Somma con l'indice solo pari o solo dispari:

$$(31) \quad \sum_{\substack{m \leq j \leq n \\ j \text{ pari}}} z_j = \sum_{m \leq 2k \leq n} z_{2k} \quad \sum_{\substack{m \leq j \leq n \\ j \text{ dispari}}} z_j = \sum_{m \leq 2k+1 \leq n} z_{2k+1} .$$

2. OPERAZIONI SU $f(t)$ CONTRO OPERAZIONI SU a_n

Oltre ad essere utili e importanti, le formule e i calcoli qui sotto saltano fuori spesso nelle prove scritte. I calcoli sono fatti con tanti passi (forse troppi), e ciascun calcolo è da considerare come un piccolo esercizio: si riesce a riprodurlo da solo?

Si fissi un periodo $T > 0$. Si consideri lo spazio vettoriale di tutte le funzioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ che sono continue a tratti e che soddisfano $f(t+T) = f(t)$. Siano $f(t)$ e $g(t)$ due funzioni di questo spazio. Si scrivono le loro serie di Fourier:

$$(32) \quad f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / T} \quad g(t) = \sum_j b_j e^{2\pi i j t / T} .$$

dove

$$(33) \quad a_j = \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i j s / T} ds \quad b_j = \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} g(s) e^{-2\pi i j s / T} ds$$

Si ricordi inoltre la formula fondamentale:

$$(34) \quad \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \bar{g}(t) dt = T \sum_j a_j \bar{b}_j .$$

2.1. La tabella degli esiti. In corrispondenza a varie operazioni su $f(t)$ e $g(t)$ ci sono varie operazioni su $(a_j)_j$ e $(b_j)_j$. Tutto è riassunto nella tabella sotto. Siano $C, D \in \mathbf{C}$, $t_0 \in \mathbf{R}$, e $j_0 \in \mathbf{Z}$ costanti.

In ciascuna riga, la funzione alla sinistra, nota sempre come $h(t)$ dipende in qualche modo di $f(t)$ e $g(t)$; alla destra si trovano $(c_j)_j$, i coefficienti di Fourier di $h(t)$.

$h(t)$	c_j
$f(t) + g(t)$	$a_j + b_j$
$Cf(t)$	Ca_j
$Cf(t) + Dg(t)$	$Ca_j + Db_j$
$f(t)g(t)$	$\sum_{k+l=j} a_k b_l = \sum_k a_k b_{j-k}$
$\frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s)g(t-s) ds$	$a_j b_j$
$f(-t)$	a_{-j}
$\bar{f}(t)$	$\bar{a}_{-j}$
$f(t-t_0)$	$e^{-2\pi i j t_0/T} a_j$
$e^{2\pi i j_0 t/T} f(t)$	a_{j-j_0}
df/dt	$\frac{2\pi i j}{T} a_j$
$\int f(t) dt$	$\frac{T}{2\pi i j} a_j$ ma solo se $a_0 = 0$

Le prime tre righe dicono che i coefficienti di Fourier dipendono in modo *lineare* sulla funzione di partenza (e vice versa). La riga successiva fa vedere che la regola per il prodotto $f(t)g(t)$ è decisamente più complicata della regola per la somma $f(t) + g(t)$ e la riga dopo fa vedere che i coefficienti di Fourier $(a_j b_j)_j$ corrisponde ad una funzione non così semplice, ma comunque importante: nel contesto delle funzioni periodiche è la *convoluzione* di f e g .

Le ultime due righe sono fondamentali: fanno vedere che derivate e antiderivate corrispondono a semplici operazioni algebriche sui coefficienti di Fourier.

Per quanto riguarda l'ultima riga, se $a_0 \neq 0$, cioè se

$$\int_{t=-T/2}^{T/2} f(t) dt \neq 0$$

allora l'antiderivata di $f(t)$ non è periodica, e non ha una serie di Fourier. Quando $a_0 = 0$ si può scegliere c_0 al piacimento: corrisponde al termine costante che si può sempre aggiungere ad un'antiderivata.

2.2. Linearità. Con l'uso di (26):

$$\begin{aligned}
 f(t) + g(t) &= \sum_j a_j e^{2\pi i j t/T} + \sum_j b_j e^{2\pi i j t/T} \\
 (35) \quad &= \sum_j (a_j e^{2\pi i j t/T} + b_j e^{2\pi i j t/T}) = \sum_j (a_j + b_j) e^{2\pi i j t/T} .
 \end{aligned}$$

Con l'uso di (27):

$$(36) \quad Cf(t) = C \sum_j a_j e^{2\pi i j t/T} = \sum_j Ca_j e^{2\pi i j t/T} = \sum_j (Ca_j) e^{2\pi i j t/T} .$$

La formula nel caso di $Cf(t) + Dg(t)$ si può ottenere mettendo insieme (35) e (36).

2.3. **Il prodotto.** Con l'uso fra altro di (25), (28), e (27):

$$\begin{aligned}
 f(t)g(t) &= \left(\sum_k a_k e^{2\pi i k t / T} \right) \left(\sum_l b_l e^{2\pi i l t / T} \right) \\
 &= \sum_{k,l} (a_k e^{2\pi i k t / T}) (b_l e^{2\pi i l t / T}) = \sum_{k,l} a_k b_l e^{2\pi i k t / T + 2\pi i l t / T} \\
 (37) \quad &= \sum_{k,l} a_k b_l e^{2\pi i (k+l) t / T} = \sum_j \left(\sum_{k+l=j} a_k b_l e^{2\pi i j t / T} \right) \\
 &= \sum_j \left(\sum_{k+l=j} a_k b_l \right) e^{2\pi i j t / T} = \sum_j \left(\sum_k a_k b_{j-k} \right) e^{2\pi i j t / T} .
 \end{aligned}$$

2.4. **I casi facili.** Con l'uso di (30) e (25):

$$\begin{aligned}
 f(-t) &= \sum_j a_j e^{2\pi i j (-t) / T} = \sum_j a_j e^{2\pi i (-j) t / T} \\
 (38) \quad &= \sum_k a_{-k} e^{2\pi i k t / T} = \sum_j a_{-j} e^{2\pi i j t / T} = \sum_j (a_{-j}) e^{2\pi i j t / T} .
 \end{aligned}$$

Con l'uso di (8), (7), (9), (2), (30), e (25):

$$\begin{aligned}
 \bar{f}(t) &= \overline{\sum_j a_j e^{2\pi i j t / T}} = \sum_j \overline{a_j e^{2\pi i j t / T}} = \sum_j \bar{a}_j e^{2\pi i j t / T} \\
 (39) \quad &= \sum_j \bar{a}_j e^{2\pi i (-j) t / T} = \sum_j \bar{a}_j e^{2\pi i (-j) t / T} \\
 &= \sum_k \bar{a}_{-k} e^{2\pi i k t / T} = \sum_j \bar{a}_{-j} e^{2\pi i j t / T} = \sum_j (\bar{a}_{-j}) e^{2\pi i j t / T} .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(t - t_0) &= \sum_j a_j e^{2\pi i j (t - t_0) / T} = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / T - 2\pi i j t_0 / T} \\
 (40) \quad &= \sum_j a_j e^{2\pi i j t / T} e^{-2\pi i j t_0 / T} = \sum_j (a_j e^{-2\pi i j t_0 / T}) e^{2\pi i j t / T} .
 \end{aligned}$$

Con l'uso di (27), (29) e (25) :

$$\begin{aligned}
 e^{2\pi i j_0 t / T} f(t) &= e^{2\pi i j_0 t / T} \sum_j a_j e^{2\pi i j t / T} = \sum_j e^{2\pi i j_0 t / T} a_j e^{2\pi i j t / T} \\
 (41) \quad &= \sum_j a_j e^{2\pi i j_0 t / T + 2\pi i j t / T} = \sum_j a_j e^{2\pi i (j + j_0) t / T} \\
 &= \sum_k a_{k - j_0} e^{2\pi i k t / T} = \sum_j a_{j - j_0} e^{2\pi i j t / T} .
 \end{aligned}$$

2.5. La derivata e l'antiderivata.

$$(42) \quad \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_j a_j e^{2\pi i j t/T} = \sum_j \frac{d(a_j e^{2\pi i j t/T})}{dt} \\ = \sum_j a_j \frac{2\pi i j}{T} e^{2\pi i j t/T} = \sum_j \left(\frac{2\pi i j a_j}{T} \right) e^{2\pi i j t/T} .$$

Sotto l'ipotesi che $a_0 = 0$:

$$(43) \quad \int f(t) dt = \int \left(\sum_{j \neq 0} a_j e^{2\pi i j t/T} \right) dt = \sum_{j \neq 0} \int a_j e^{2\pi i j t/T} dt \\ = \left(\sum_{j \neq 0} a_j \frac{T}{2\pi i j} e^{2\pi i j t/T} \right) + C = \left(\sum_{j \neq 0} \left(\frac{T}{2\pi i j} a_j \right) e^{2\pi i j t/T} \right) + C .$$

e si identifichi la costante a piacere C con il coefficiente di Fourier c_0 dell'antiderivata, che è altrettanto a piacere.

2.6. La convoluzione. In via preliminare calcoliamo un'utile formula per $\int_{s=-T/2}^{T/2} f(s)g(s) ds$ quando

$$(44) \quad f(s) = \sum_j a_j e^{2\pi i j s/T} \quad g(s) = \sum_j b_j e^{2\pi i j s/T} .$$

come di sopra in (32). Sia $p(s) = \bar{g}(s)$. Secondo (2) vale altrettanto $g(s) = \bar{p}(s)$. Secondo (39)

$$(45) \quad p(s) = \sum_j \overline{b_{-j}} e^{2\pi i j s/T} .$$

Risulta, con l'uso di (34) e ancora di (2):

$$(46) \quad \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s)g(s) ds = \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s)\bar{p}(s) ds = T \sum_j a_j \overline{\overline{b_{-j}}} = T \sum_j a_j b_{-j} .$$

Secondo (40) (con $-t$ al posto di t_0 e s al posto di t)

$$\sum_j (e^{2\pi i j t/T} a_j) e^{2\pi i j s/T} = f(s+t) ,$$

e secondo (38) (con g al posto di f , b_j al posto di a_j , e s al posto di t)

$$\sum_j b_{-j} e^{2\pi i j s/T} = g(-s) .$$

Con queste si applica (46) e poi la sostituzione $u = s + t$, $s = u - t$, $du = ds$ insieme con (22):

$$\begin{aligned}
 (47) \quad T \sum_j (a_j b_j) e^{2\pi i j t / T} &= T \sum_j (e^{2\pi i j t / T} a_j) (b_{-(-j)}) \\
 &= \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s+t) g(-s) ds = \int_{u=-T/2+t}^{T/2+t} f(u) g(-(u-t)) du \\
 &= \int_{u=-T/2}^{T/2} f(u) g(t-u) du = \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) g(t-s) ds .
 \end{aligned}$$

3. OPERAZIONI SU $f(t)$ CONTRO OPERAZIONI SU a_n : CON INTEGRALI

Le formule (33) permettono di calcolare coefficienti di Fourier come integrali. Così, si può calcolare in modo alternativo tutte le corrispondenze della sezione precedente usando integrali. Gli esiti dei calcoli sotto coincidono per forza con gli esiti dei calcoli sopra (perchè sono giusti, e la matematica non è un'opinione.)

3.1. Linearità con l'uso di integrali.

$$\begin{aligned}
 (48) \quad \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} (f(s) + g(s)) e^{-2\pi i j s / T} ds \\
 = \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i j s / T} ds + \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} g(s) e^{-2\pi i j s / T} ds = a_j + b_j .
 \end{aligned}$$

$$(49) \quad \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} (C f(s)) e^{-2\pi i j s / T} ds = \frac{C}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i j s / T} ds = C a_j .$$

3.2. Il prodotto con l'uso di un integrale. Secondo (41) (con $-j$ al posto di j_0 , l al posto di j , e s al posto di t):

$$e^{-2\pi i j s / T} f(s) = \sum_l a_{l+j} e^{2\pi i l s / T}$$

Poi, con l'uso di (46) (con l al posto di j) e (29):

$$\begin{aligned}
 (50) \quad \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} (f(s) g(s)) e^{-2\pi i j s / T} ds &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} (f(s) e^{-2\pi i j s / T}) g(s) ds \\
 &= \frac{T}{T} \sum_l a_{l+j} b_{-l} = \sum_k a_k b_{-(k-j)} = \sum_k a_k b_{j-k} .
 \end{aligned}$$

3.3. I casi facili con l'uso di integrali. Con la sostituzione $-s = u$, $u = -s$, $ds = -du$ e l'uso di (13):

$$(51) \quad \begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} (f(-s)) e^{-2\pi i j s/T} ds &= \frac{1}{T} \int_{u=T/2}^{-T/2} f(u) e^{-2\pi i j (-u)/T} (-du) \\ &= \frac{1}{T} \int_{u=-T/2}^{T/2} f(u) e^{-2\pi i (-j) u/T} du = a_{-j} . \end{aligned}$$

Con l'uso di (7) e (11):

$$(52) \quad \begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} (\bar{f}(s)) e^{-2\pi i j s/T} ds &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} \overline{f(s) e^{2\pi i j s/T}} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} \overline{f(s)} e^{2\pi i j s/T} ds = \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i (-j) s/T} ds = \bar{a}_{-j} . \end{aligned}$$

Con la sostituzione $u = s - t_0$, $s = u + t_0$, $ds = du$ e l'uso di (22):

$$(53) \quad \begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} (f(s - t_0)) e^{-2\pi i j s/T} ds &= \frac{1}{T} \int_{u=-T/2-t_0}^{T/2-t_0} f(u) e^{-2\pi i j (u+t_0)/T} du \\ &= \frac{1}{T} \int_{u=-T/2}^{T/2} f(u) e^{-2\pi i j u/T} e^{-2\pi i j t_0/T} du \\ &= \frac{e^{-2\pi i j t_0/T}}{T} \int_{u=-T/2}^{T/2} f(u) e^{-2\pi i j u/T} du = e^{-2\pi i j t_0/T} a_j . \end{aligned}$$

$$(54) \quad \begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} (e^{2\pi i j_0 s/T} f(s)) e^{-2\pi i j s/T} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i (-j_0) s/T} e^{-2\pi i j s/T} ds \\ &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i (j-j_0) s/T} ds = a_{j-j_0} . \end{aligned}$$

3.4. La derivata e l'antiderivata con l'uso di integrali. Con l'integrazione per parti e l'uso di (21):

$$(55) \quad \begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} (df/ds) e^{-2\pi i j s/T} ds \\ &= \frac{1}{T} [f(s) e^{-2\pi i j s/T}]_{s=-T/2}^{T/2} - \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) \left(\frac{-2\pi i j}{T} e^{-2\pi i j s/T} \right) ds \\ &= \frac{2\pi i j}{T} \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i j s/T} ds = \frac{2\pi i j}{T} a_j . \end{aligned}$$

Sia $F(s) = \int f(s) ds$. Nel calcolo dei coefficienti di Fourier di $F(s)$ si lavori sotto l'ipotesi che $F(T/2) - F(-T/2) = \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) ds = 0$, cioè

che $F(s)$ sia periodico. Per $j \neq 0$, con l'integrazione per parti e l'uso di (21):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} F(s) e^{-2\pi i j s/T} ds \\
 &= \frac{1}{T} F(s) \left(\frac{T}{-2\pi i j} e^{-2\pi i j s/T} \right) \Big|_{s=-T/2}^{T/2} \\
 & \quad - \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) \left(\frac{T}{-2\pi i j} e^{-2\pi i j s/T} \right) ds \\
 &= \frac{T}{2\pi i j} \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i j s/T} ds = \frac{T}{2\pi i j} a_j .
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

Come di sopra, il 0-esimo coefficiente di Fourier di F è a scelta libera, e corrisponde alla costante C che si può aggiungere a $F(s) = \int f(s) ds$.

3.5. La convoluzione con l'uso di integrali. Per questo calcolo occorre il fatto che in un integrale doppio si può scambiare l'ordine dei due integrali. Con quello e la sostituzione $u = t - s$, $t = u + s$, $dt = du$, e l'uso di (22):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} \left(\frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) g(t-s) ds \right) e^{-2\pi i j t/T} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} \left(\frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} f(s) g(t-s) e^{-2\pi i j t/T} dt \right) ds \\
 &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) \left(\frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} g(t-s) e^{-2\pi i j t/T} dt \right) ds \\
 &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) \left(\frac{1}{T} \int_{u=-T/2-s}^{T/2-s} g(u) e^{-2\pi i j (u+s)/T} du \right) ds \\
 &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) \left(\frac{1}{T} \int_{u=-T/2}^{T/2} g(u) e^{-2\pi i j u/T} e^{-2\pi i j s/T} du \right) ds \\
 &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i j s/T} \left(\frac{1}{T} \int_{u=-T/2}^{T/2} g(u) e^{-2\pi i j u/T} du \right) ds \\
 &= \frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i j s/T} b_j ds \\
 &= \left(\frac{1}{T} \int_{s=-T/2}^{T/2} f(s) e^{-2\pi i j s/T} ds \right) b_j = a_j b_j .
 \end{aligned}
 \tag{57}$$