

Analisi 1 (Steger/Gladiali) — esempi di possibili esercizi per l'esame

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet

La durata dell'esame è 3 ore. Nessuno è obbligato a rimanere per l'intero periodo. Preferisco che i compiti disastrosi non siano consegnati.

L'esame sarà fatto di 6 esercizi, A-F. Sotto, si trovano due possibili esercizi per ciascuna lettera. Semmai, gli esercizi dell'esame scritta saranno un po' più facili di questi.

La definizione della trasformata di Laplace è

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

A1. Sia $k < l$. Quali dei seguenti vale per $t \rightarrow +\infty$?

$$e^{kt} = O(e^{lt}) \quad e^{lt} = O(e^{kt}) \quad e^{kt} = o(e^{lt}) \quad e^{lt} = o(e^{kt})$$

Poi rispondere la stessa domanda per $t \rightarrow -\infty$ e ancora per $t \rightarrow 8$. Spiegare le risposte.

A2. È possibile scrivere

$$\frac{1}{x^3 + 2x} = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^5} + O(1/x^A) \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

Trovare il valore di A più grande possibile per cui questo vale e spiegare perché vale.

B1. Siano $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Calcolare la formula per

$$\frac{d^2}{dt^2}(x^m y^n)$$

(Gli dati esponenti m e n sono costanti.)

B2. Calcolare la formula per

$$\frac{d^3}{dx^3} f(e^x)$$

(La data funzione f è arbitraria.)

C1. Usare la sostituzione $t = e^u$ per calcolare

$$\int (\log(t))^3 t \, dt$$

C2. Usare l'integrazione per parti (2 volte) per calcolare

$$\int e^{kt} \cos(lt) \, dt$$

(I dati parametri k e l sono costanti.)

D1. Usare una sostituzione trigonometrica per calcolare

$$\int \frac{1}{(x^2 + A^2)^3} \, dx$$

(Il dato parametro A è costante.)

D2. Calcolare

$$\int \frac{y}{(y-A)(y-B)} \, dy$$

(I dati parametri A e B sono costanti.)

E1. Trovare la soluzione generale all'equazione differenziale:

$$t \frac{dx}{dt} + 3x = e^t$$

Qui l'incognita è $x = x(t)$.

E2. Sotto l'ipotesi che $b^2 - 4c < 0$, trovare la soluzione generale all'equazione differenziale:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

Trovare la frequenza delle oscillazioni di questa soluzione. (I dati parametri b e c sono costanti.)

F1. Calcolare la trasformata di Laplace di $(t + a)^3$. (Il dato parametro a è costante.)

F2. Trovare i primi due termini non nulli e un termine d'errore nella serie di Taylor per $1 - \cos t$. Il termine d'errore deve avere la forma $O(t^m)$ per $t \rightarrow 0$ con l'esponente m da determinare. Sulla base di questa risposta, trovare i primi due termini non nulli e un termine d'errore per $(1 - \cos t)^3$.