

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Ingegneria (Steger)

Prova Scritta di 17 giugno 2026

Regolamento:

- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, gli "orologi intelligenti" e tutti gli aggregati capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con ragionevoli soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \phi \cos \theta \quad y = r \sin \phi \sin \theta \quad z = r \cos \phi$$
$$dV = dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$$

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\int_{v=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} dv = \pi$$

A. Sia $f(t)$ definita da:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| > 1 \end{cases}$$

1. Calcolare $\hat{f}(\omega)$.
2. Calcolare $f(0)$ sulla base di $\hat{f}(\omega)$. La risposta è per forza 1, ma l'esercizio qui è di calcolarla sulla base di $\hat{f}(\omega)$. L'integrale da fare non è facilissimo: conviene prima sostituire i limiti $-\infty < \omega < +\infty$ con i limiti $0 < \omega < +\infty$ e poi fare un'integrazione per parti dove uno dei fattori sia $1/\omega^3$.

B. Trovare il massimo e il minimo di $3x^2 + 4xy$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$. (Indicazione: ci sono vari metodi per risolvere le equazioni che vengono fuori, ma con qualsiasi metodo occorre ad un punto o l'altro risolvere un'equazione di secondo grado.)

C. Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad z = z \\ dV = dx dy dz = R dR dz d\theta$$

1. Disegnare tre superfici di livello, una per R (dove $R = R_0$), una per θ (dove $\theta = \theta_0$), e una per z (dove $z = z_0$).
2. Calcolare la matrice $\partial(x, y, z)/\partial(R, \theta, z)$.
3. Sulla base dell'esito precedente, calcolare la matrice $\partial(R, \theta, z)/\partial(x, y, z)$.
4. Sulla base dell'esito precedente, trovare i gradienti ∇R , $\nabla \theta$, e ∇z .
5. Verificare che quei tre gradienti sono perpendicolari tra di loro. Poi spiegare che cosa significa quella perpendicolarità per le superfici di livello della prima parte.

D. Sia T un parametro fisso, $T > 0$. Si consideri il quarto di sfera $\mathcal{Q}$ dato da:

$$x, y \geq 0 \quad \text{dist} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix} \right) \leq T$$

Prima fare un disegno di $\mathcal{Q}$. Poi, usare le coordinate *sferiche* e calcolare la media di xyz su $\mathcal{Q}$ (ponderata dal volume).

1/14

A II

$$\hat{f}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{t=-1}^{+1} (1-t^2) e^{-i\omega t} dt$$

$$= (1-t^2) \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_{t=-1}^{+1} + \frac{1}{i\omega} \int_{t=-1}^{+1} (-2t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= (-2t) \frac{1}{(i\omega)} \frac{1}{(-i\omega)} e^{-i\omega t} \Big|_{t=-1}^{+1} + \frac{1}{(i\omega)} \frac{1}{(i\omega)} \int_{t=-1}^{+1} (-2) e^{-i\omega t} dt$$

$$= -\frac{2}{\omega^2} t e^{-i\omega t} \Big|_{t=-1}^{+1} + \frac{1}{(i\omega)} \frac{1}{(i\omega)} \frac{1}{(-i\omega)} (-2) e^{-i\omega t} \Big|_{t=-1}^{+1}$$

$$= -\frac{2}{\omega^2} (1 \cdot e^{-i\omega} + 1 \cdot e^{i\omega}) + \frac{2}{-i\omega^3} (e^{-i\omega} - e^{i\omega})$$

$$= -\frac{4}{\omega^2} \frac{(e^{i\omega} + e^{-i\omega})}{2} + \frac{4}{\omega^3} \frac{(e^{i\omega} - e^{-i\omega})}{2i}$$

$$= \left(-\frac{4}{\omega^2} \cos(\omega) + \frac{4}{\omega^3} \sin(\omega) \right)$$

$$= \frac{4}{\omega^3} (-\omega \cos(\omega) + \sin(\omega))$$

2/14

[2]

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \cdot 0} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{\omega^3} (\cos(\omega) + \sin(\omega)) d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^3} (-\omega \cos(\omega) + \sin(\omega)) d\omega$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_{\omega=0}^{+\infty} \frac{1}{\omega^3} (-\omega \cos(\omega) + \sin(\omega)) d\omega$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(-\frac{1}{2\omega^2} (-\omega \cos(\omega) + \sin(\omega)) \right) \Big|_{\omega=0}^{+\infty}$$

$$+ \int_{\omega=0}^{+\infty} \frac{1}{2\omega^2} (-\cos(\omega) + \omega \sin(\omega) + \cos(\omega)) d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\omega^2} (-\omega \cos(\omega) + \sin(\omega)) \right) \Big|_{\omega=0}^{+\infty}$$

$$+ \int_{\omega=0}^{+\infty} \frac{1}{\omega} \sin(\omega) d\omega$$

3/14

Si stabilisci che il primo termine
svanisce sia per $w \rightarrow +\infty$ che per $w \rightarrow 0$.

$$-\frac{1}{w^2} (-w \cos(w) + \sin(w)) = -\frac{1}{w^2} (O(w) + O(1))$$

$$= \frac{1}{w^2} (O(w)) = O\left(\frac{1}{w}\right) \rightarrow 0$$

per $w \rightarrow +\infty$,

$$-\frac{1}{w^2} (-w \cos(w) + \sin(w))$$

$$= -\frac{1}{w^2} (-w(1 + O(w^2)) + (w + O(w^3)))$$

$$= -\frac{1}{w^2} (O(w^3) + O(w^3)) = -\frac{1}{w^2} O(w^3)$$

$$= O(w) \rightarrow 0$$

per $w \rightarrow 0$ $\square$

Quindi

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{w} \cos(w) dw = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{w} \cos(w) dw \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \pi = \boxed{1} \end{aligned}$$

4/14

[3]

$$f(x) = 3x^2 + 4xy$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 6x + 4y \\ 4x \end{pmatrix}$$

$$g(x) = x^2 + y^2$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6x + 4y \\ 4x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$
$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 2x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Trattando x e y come le incognite, questo dà un sistema lineare omogeneo

$$(3 - \lambda)x + 2y = 0$$

$$2x - \lambda y = 0$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9/14

Se $\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \neq 0$, allora la
sola soluzione è $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, che
non vale, poiché non soddisfa
 $x^2 + y^2 = 1$. Per tanto ci serve

$$0 = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(-\lambda) - 4 \\ = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

$$\text{onde } \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda = 4} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \leadsto x = 2y \\ \leadsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e l'extra vincolo $1 = x^2 + y^2$ dà

$$1 = 4h^2 + h^2 = 5h^2 \leadsto \cancel{h = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}} \\ \hookrightarrow h = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6/14

e il valore di f è

$$3x^2 + 4xy = 3\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{5}(12+8) = \frac{1}{5}(20) = \boxed{4}$$

$$\boxed{\lambda = -1} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow y = -2x$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Come sopra, si trova $k = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e il valore di f è

$$3x^2 + 4xy = 3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{5}(3-8) = \frac{1}{5}(-5) = \boxed{-1}$$

7/14

Non ci sono punti

○ sulla frontiera

○ verso l'infinito

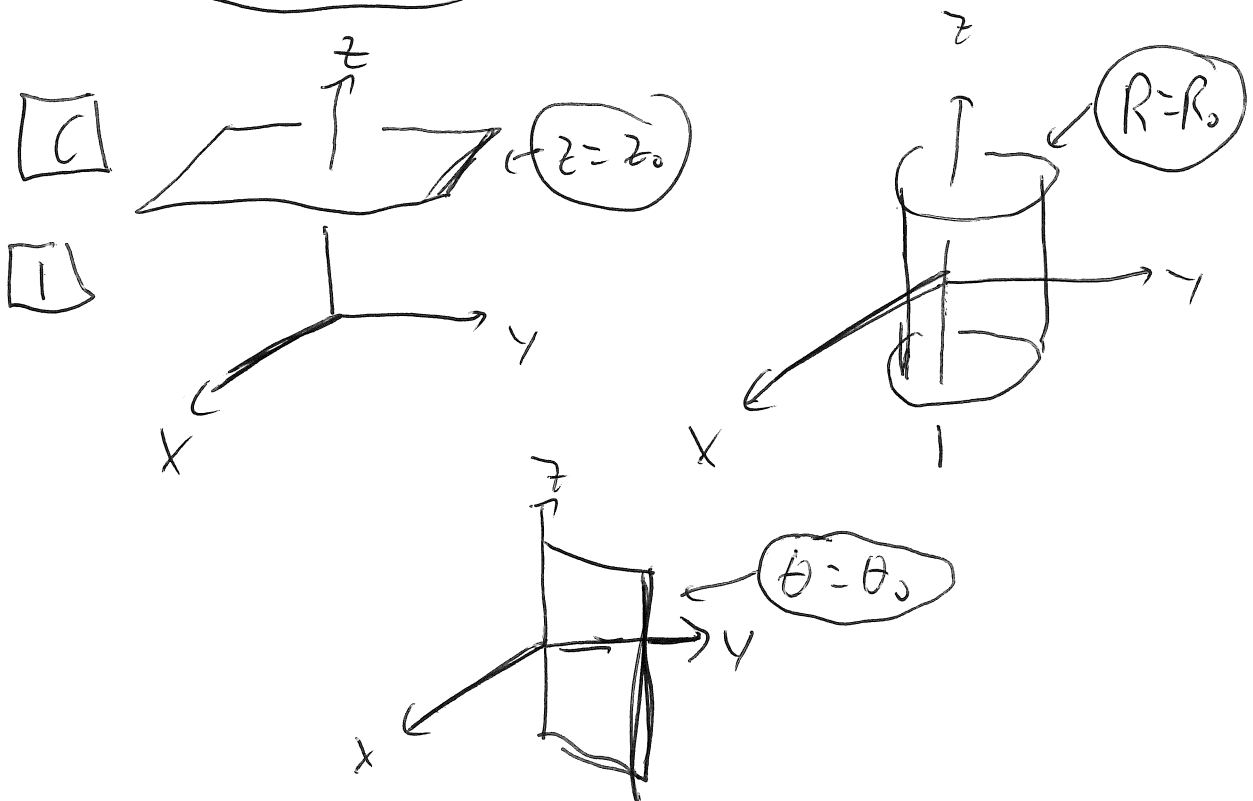
○ dove ∇f o ∇g
non esistono

○ dove $\nabla g = 0$

Perciò

mass = 4

min = -1



8/14

$$\boxed{2} \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \theta, z)} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial R & \partial x / \partial \theta & \partial x / \partial z \\ \partial y / \partial R & \partial y / \partial \theta & \partial y / \partial z \\ \partial z / \partial R & \partial z / \partial \theta & \partial z / \partial z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -R \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & R \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{3} \quad \frac{\partial(R, \theta, z)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \partial R / \partial x & \partial R / \partial y & \partial z / \partial x \\ \partial \theta / \partial x & \partial \theta / \partial y & \partial z / \partial y \\ \partial z / \partial x & \partial z / \partial y & \partial z / \partial z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(R, \theta, z)}{\partial(x, y, z)} = \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(R, \theta, z)} \right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & + \sin \theta & 0 \\ -\frac{1}{R} \sin \theta & \frac{1}{R} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{4} \quad \nabla R = \begin{pmatrix} \partial R / \partial x \\ \partial R / \partial y \\ \partial R / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

9/14

$$\underline{\nabla} \theta = \begin{pmatrix} \partial \theta / \partial x \\ \partial \theta / \partial y \\ \partial \theta / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} \sin \theta \\ \frac{1}{R} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\nabla} z = \begin{pmatrix} \partial z / \partial x \\ \partial z / \partial y \\ \partial z / \partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□ È evidente che

$$\underline{\nabla} R \cdot \underline{\nabla} z = \underline{\nabla} \theta \cdot \underline{\nabla} z = 0$$

$$\text{e } \underline{\nabla} R \cdot \underline{\nabla} \theta = \cos \theta \left(-\frac{1}{R} \sin \theta \right) + \sin \theta \left(\frac{1}{R} \cos \theta \right) = 0$$

I tre gradienti sono perpendicolari fra di loro. I tre gradienti sono anche perpendicolari ciascuno al corrispondente superficie di livello. Significa che i 3

11/14

$$\Leftrightarrow \cancel{m} \quad 2m \cdot \cos \varphi \cdot T \geq m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 \leq 2m \cdot \cos \varphi \cdot T$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2 \cos \varphi T$$

Quanto è possibile solo se

$\cos \varphi \geq 0$, cioè se $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

cioè solo se siamo nell'~~angolo~~ angolo

nell'emisfero di sopra, con $z \geq 0$

$$\iiint_V 1 \, dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{m=0}^{2 \cdot \cos \varphi \cdot T} 1 \cdot m^2 \sin \varphi \, dm \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{1}{3} (2 \cos \varphi T)^3 \sin \varphi \, d\varphi \right) d\theta$$

12/14

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{8T^3}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{4\pi T^3}{3} \cdot \frac{1}{4} (-\cos^4 \varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi T^3}{3} (-0^4 + 1^4) = \frac{\pi T^3}{3}$$

(giusto per il volume di un
quarto di una sfera di raggio
 T).

$$\iiint_{\Omega} x y z \, dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{\rho=0}^{2 \cos \varphi T} \right) \right)$$

$$(\rho \sin \varphi \cos \theta) (\rho \sin \varphi \sin \theta) (\rho \cos \varphi)$$

$$\cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

13/14

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos \varphi \left(\int_{r=0}^{2 \cos \varphi \cdot T} r^5 dr \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos \varphi \frac{1}{6} (2 \cos \varphi \cdot T)^6 d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{6^4}{6} T^6 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^7 \varphi d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{32}{3} T^6 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \cos^7 \varphi d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{32}{3} T^6 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \left(\left[-\frac{1}{8} \cos^8 \varphi + \frac{1}{10} \cos^{10} \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi/2} \right) d\theta$$

$$= \frac{32}{3} T^6 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) d\theta$$

$$\frac{14}{14}$$

$$= \frac{32}{3} T^6 \frac{1}{40} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$\approx \frac{4}{15} T^6 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

$$\approx \frac{4}{15} T^6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{15} T^6$$

$$\overline{X_{42}} = \frac{2/15 \cdot T^6}{\pi/3 \cdot T^3} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{\pi} T^3$$

$$\approx \frac{2}{5\pi} T^3$$