

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Ingegneria (Steger)

Prova Scritta di 10 febbraio 2026

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con ragionevoli soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A. Si ricordi che se  $f(t)$  rappresenta una densità sulla rete,  $-\infty < t < \infty$ , e se  $g(t)$  sia una qualsiasi funzione su quella rete, la media di  $g$ , ponderata per la massa data da  $f$  è

$$\bar{g} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt}$$

1. Esprimere  $\bar{t}$  usando la trasformata di Fourier  $\hat{f}(\omega)$ .
2. Esprimere  $\overline{t^2}$  usando la trasformata di Fourier  $\hat{f}(\omega)$ .
3. Si consideri la funzione specifica  $f(t) = e^{-t^2/2}$ . Si ricordi che  $\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}$ . Usare le formule delle prime due parti per calcolare  $\bar{t}$  e  $\overline{t^2}$  ponderata da questa  $f(t)$ .
4. Siano  $b$  e  $S > 0$  due parametri fissi. Si consideri la funzione

$$h(t) = e^{-(t-b)^2/(2S^2)}$$

Sulla base della formula per  $\hat{f}$ , calcolare  $\hat{h}$ .

5. Calcolare  $\bar{t}$  e  $\overline{t^2}$  ponderata da  $h(t)$ .

B. Siano

$$f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 \qquad g(x, y) = 3x^2 + 4xy + 5y^2$$

Si concentri sul punto base  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calcolare i valori di  $f$  e  $g$  al punto base.
2. Calcolare la matrice  $\partial(f, g)/\partial(x, y)$  al punto base.
3. Calcolare la matrice  $\partial(x, y)/\partial(f, g)$  al punto base.
4. Trovare un'approssimazione ai valori di  $x$  e  $y$  che darebbero

$$f(x, y) = 9,3 \qquad g(x, y) = 12,6$$

C. Siano  $A$ ,  $B$ , e  $C$  tre parametri fissi, tutti positivi. Si consideri la superficie parametrizzata da  $\phi$  e  $\theta$  secondo queste formule:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \sin \phi \cos \theta \\ B \sin \phi \sin \theta \\ C \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1)$$

In termini di  $\phi$  e  $\theta$ , trovare un vettore perpendicolare a questa superficie al punto di (1).

D.

1. Calcolare la media di  $s^2$ , ponderata dalla lunghezza, sul intervallo definito da  $0 \leq s \leq 1$ .
2. Calcolare la media di  $s^2$ , ponderata dall'area, sul triangolo definito da  $0 \leq s \leq t \leq 1$ .
3. Calcolare la media di  $s^2$ , ponderata dal volume, sul tetraedro definito da  $0 \leq s \leq t \leq u \leq 1$ .
4. Calcolare la media di  $s^2$ , ponderata dal 4-volume, sul "simpleso" definito da  $0 \leq s \leq t \leq u \leq v \leq 1$ .
5. *Senza fare nuovi calcoli*, tentare di indovinare la risposta che varrebbe in 5 dimensioni.

1/13

[A] Per cominciare, un calcolo dalle lezioni:

$$\widehat{df/dt}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dt} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \left[ f(t) e^{i\omega t} \right]_{t=-\infty}^{+\infty} - \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) (i\omega) e^{i\omega t} dt$$

perché  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$

$$\text{e } |e^{-i\omega t}| = 1$$

$$= i\omega \hat{f}(\omega)$$

Però ci serve una formula con

$f(t)$ , non con  $\omega \hat{f}(\omega)$ . Per

tanto, facciamo un calcolo simile

per la trasformata di Fourier inversa

2/13

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{f}}{d\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) i e^{i\omega t} d\omega$$

$$= -i t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= -i t f(t)$$

onde  $\frac{d\hat{f}}{d\omega} = -i t f(t)$  ossia  $i \frac{d\hat{f}}{d\omega} = t f(t)$

Questo si può ripetere

$$i \left( \frac{d}{d\omega} \left( i \frac{d\hat{f}}{d\omega} \right) \right) = i \left( \frac{d}{d\omega} (t f(t)) \right)$$

$$= t \cdot t f(t)$$

ovvero  $t^2 f(t) = - \frac{d^2}{d\omega^2} \hat{f}(\omega)$

3/13

$$\textcircled{1} \quad \bar{t} = \frac{\int_{t=-\infty}^{+\infty} t f(t) dt}{\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) dt}$$

$$= \frac{\widehat{t f(t)}(0)}{\widehat{f(t)}(0)} = \frac{i \frac{d\hat{f}}{d\omega} \big|_{\omega=0}}{\hat{f} \big|_{\omega=0}}$$

$$\textcircled{2} \quad \bar{t^2} = \frac{\int_{t=-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt}{\int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) dt}$$

$$= \frac{\widehat{t^2 f(t)}(0)}{\widehat{f(t)}(0)} = \frac{-\frac{d^2}{d\omega^2} \hat{f} \big|_{\omega=0}}{\hat{f} \big|_{\omega=0}}$$

$$\textcircled{3} \quad f(t) = e^{-t^2/2}$$
$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} \quad (\text{note!})$$

$$\frac{d\hat{f}}{d\omega} = -\sqrt{2\pi} \cdot \omega e^{-\omega^2/2}$$

$$\frac{d^2\hat{f}}{d\omega^2} = \sqrt{2\pi} \omega^2 e^{-\omega^2/2} - \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

4/13

$$\hat{f}|_{w=0} = \sqrt{2\pi}$$

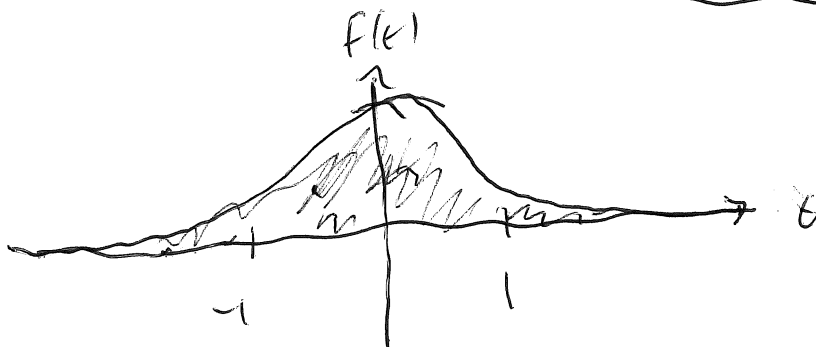
$$\frac{d\hat{f}}{dw}|_{w=0} = 0$$

$$\frac{d^2\hat{f}}{dw^2}|_{w=0} = -\sqrt{2\pi}$$

Per questo  $f(t)$ ,

$$\bar{t} = \frac{0}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

$$\bar{t}^2 = \frac{-(-\sqrt{2\pi})}{\sqrt{2\pi}} = 1$$



$$(4) \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

(resto)

(5/13)

$$\hat{h}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-b)^2/2s^2} e^{-i\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} u &= (t-b)/s \\ -(t-b)^2/2s^2 &= -u^2/2 \\ t &= b + su \\ dt &= s du \end{aligned}$$

$$= \int_{u=-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} e^{-i\omega(b+su)} s du$$

$$= s e^{-i\omega b} \int_{u=-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} e^{-i\omega s u} du$$

$$= s e^{-i\omega b} \cdot \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2 s^2/2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \frac{d\hat{h}}{d\omega} &= -ib s e^{-i\omega b} \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2 s^2/2} \\ &\quad - s e^{-i\omega b} \sqrt{2\pi} \cdot s^2 \omega e^{-\omega^2 s^2/2} \end{aligned}$$

6/13

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \hat{h}}{d\omega^2} = & -b^2 S e^{-i\omega b} \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2 S^2/2} \\ & + 2i b S e^{-i\omega b} \sqrt{2\pi} S^2 \omega e^{-\omega^2 S^2/2} \\ & + S e^{-i\omega b} \sqrt{2\pi} \cdot S^4 \omega^2 e^{-\omega^2 S^2/2} \\ & - S e^{-i\omega b} \sqrt{2\pi} S^2 e^{-\omega^2 S^2/2}\end{aligned}$$

$$\hat{h}(0) = \sqrt{2\pi} S$$

$$\left. \frac{d\hat{h}}{d\omega} \right|_{\omega=0} = -\sqrt{2\pi} i b S$$

$$\left. \frac{d^2 \hat{h}}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} = -\sqrt{2\pi} b^2 S - \sqrt{2\pi} S^3$$

$$\bar{t} = \frac{i \left. d\hat{h}/d\omega \right|_{\omega=0}}{\hat{h}|_{\omega=0}} = \frac{i(-\sqrt{2\pi} i b S)}{\sqrt{2\pi} S} = \boxed{b}$$

$$\begin{aligned}\bar{t}^2 &= \frac{- \left. d^2 \hat{h}/d\omega^2 \right|_{\omega=0}}{\hat{h}|_{\omega=0}} = \frac{-(-\sqrt{2\pi} b^2 S - \sqrt{2\pi} S^3)}{\sqrt{2\pi} S} \\ &= \boxed{b^2 + S^2}\end{aligned}$$

7/13

B

$$\textcircled{1} \quad 2x^2 + 3xy + 4y^2 \Big|_{x=y=1} = 2 + 3 + 4 = \textcircled{9}$$

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 \Big|_{x=y=1} = 3 + 4 + 5 = \textcircled{12}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial(2x^2 + 3xy + 4y^2, 3x^2 + 4xy + 5y^2)}{\partial(x, y)} \Big|_{x=y=1}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x + 3y & 3x + 8y \\ 6x + 4y & 4x + 10y \end{pmatrix} \Big|_{x=y=1}$$

$$= \textcircled{\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(f, g)} \Big|_{x=y=1} = \left( \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} \Big|_{x=y=1}$$

8/13

$$= \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}} = \frac{1}{98 - 110} \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ -10 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ +10 & -7 \end{pmatrix}$$

④ Conchiario  $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$  tale

$$\text{che } \begin{pmatrix} \Delta f \\ \Delta g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9, 3 \\ 12, 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 3 \\ 0, 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx \frac{\partial (x, y)}{\partial (f, g)} \begin{pmatrix} \Delta f \\ \Delta g \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, 3 \\ 0, 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2, 4 \\ -1, 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 2 \\ -0, 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e allora } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, 2 \\ -0, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 0, 9 \end{pmatrix}$$

9/13

Controllo:

$$2x^2 + 3xy + 4y^2 \Big|_{\substack{x=1,2 \\ y=0,9}} = 9,36 \approx 9,3$$

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 \Big|_{\substack{x=1,2 \\ y=0,9}} = 12,69 \approx 12,6$$

$$\boxed{C} \quad \partial \begin{pmatrix} A \cos \varphi \cos \theta \\ B \cos \varphi \sin \theta \\ C \cos \varphi \end{pmatrix} / \partial \varphi$$

$$= \begin{pmatrix} -A \sin \varphi \cos \theta \\ -B \sin \varphi \sin \theta \\ -C \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Questo vettore } è tangente alla  
superficie, tangente alla curva  
dove  $\varphi$  varia,  $\theta$  è costante

10/13

$$\partial \begin{pmatrix} A \cos \varphi \cos \theta \\ B \cos \varphi \sin \theta \\ C \cos \varphi \end{pmatrix} / \partial \theta = \begin{pmatrix} -A \cos \varphi \sin \theta \\ B \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questo vettore  $\rightarrow$  è tangente alla superficie, tangente alla curva dove  $\theta$  varia,  $\varphi$  è costante. Il vettore perpendicolare alla superficie è perpendicolare ad ambedue i vettori tangenti:

$$\begin{pmatrix} A \cos \varphi \cos \theta \\ B \cos \varphi \sin \theta \\ -C \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -A \cos \varphi \sin \theta \\ B \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cos \varphi \begin{pmatrix} A \cos \varphi \cos \theta \\ B \cos \varphi \sin \theta \\ -C \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -A \sin \theta \\ B \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cos \varphi \begin{pmatrix} B C \sin \varphi \cos \theta \\ A C \sin \varphi \sin \theta \\ A B \cos \varphi \end{pmatrix}$$

11/13

Il fattore scalare di  $\cos \varphi$   
non cambia la direzione del  
vettore, quindi una risposta  
corretta è

$$\begin{pmatrix} B C \sin \varphi \cos \theta \\ A C \sin \varphi \sin \theta \\ A B \cos \varphi \end{pmatrix}$$

[D]

①

$$\frac{\int_{s=0}^1 s^2 ds}{\int_{s=0}^1 1 ds} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

②

$$\frac{\int_{t=0}^1 \left( \int_{s=0}^t s^2 ds \right) dt}{\int_{t=0}^1 \left( \int_{s=0}^t s ds \right) dt} = \frac{\int_{t=0}^1 \frac{t^3}{3} dt}{\int_{t=0}^1 t dt} = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6}$$

12/13

(3)

$$\frac{\int_{u=0}^1 \left( \int_{t=0}^u \left( \int_{s=0}^6 s^2 ds \right) dt \right) du}{\int_{u=0}^1 \left( \int_{t=0}^u \left( \int_{s=0}^6 1 ds \right) dt \right) du}$$

$$= \frac{\int_{u=0}^1 \left( \int_{t=0}^u \frac{t^3}{3} dt \right) du}{\int_{u=0}^1 \left( \int_{t=0}^u t dt \right) du} = \frac{\int_{u=0}^1 \frac{u^4}{12} du}{\int_{u=0}^1 \frac{u^2}{2} du}$$

$$= \frac{1/60}{1/6} = \left( \frac{1}{10} \right)$$

(4)

$$\frac{\int_{v=0}^1 \left( \int_{u=0}^v \left( \int_{t=0}^u \left( \int_{s=0}^6 s^2 ds \right) dt \right) du \right) dv}{\int_{v=0}^1 \left( \int_{u=0}^v \left( \int_{t=0}^u \left( \int_{s=0}^6 1 ds \right) dt \right) du \right) dv}$$

13/13

$$= \frac{\int_{v=0}^1 \left( \int_{u=0}^v \left( \int_{t=0}^u \frac{t^3}{3} dt \right) du \right) dv}{\int_{v=0}^1 \left( \int_{u=0}^v \left( \int_{t=0}^u t dt \right) du \right) dv}$$

$$= \frac{\int_{v=0}^1 \left( \int_{u=0}^v \frac{u^4}{12} du \right) dv}{\int_{v=0}^1 \left( \int_{u=0}^v \frac{u^2}{2} du \right) dv} = \frac{\int_{v=0}^1 \frac{v^5}{60} dv}{\int_{v=0}^1 \frac{v^3}{6} dv}$$

$$= \frac{1/360}{1/24} = \left( \frac{1}{15} \right)$$

(5)  $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \left( \frac{1}{21} \right)$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{+3} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{+4} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{+5} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{+6}$