

Analisi 2, Ingegneria (Steger)

Prova Scritta di 19 dicembre 2025

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con ragionevoli soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

$$E! = \int_{u=0}^{+\infty} u^E e^{-u} du$$

A.

1. Sia $f(t)$ la funzione periodica con periodo 2π data da

$$f(t) = t \quad \text{per } -\pi < t \leq \pi$$

e serie di Fourier $\sum_j a_j e^{ijt}$. Calcolare i coefficienti a_j . Non dimenticare il caso speciale $j = 0$.

2. Sia $g(t) = f(t - \pi)$ con serie di Fourier $\sum_j b_j e^{ijt}$. Sulla base di (1) (e senza nuovi integrali), calcolare i coefficienti b_j .
3. Sulla base degli esiti precedenti, calcolare i coefficienti nella serie di Fourier di $f(t) + g(t)$.
4. Sia $h(t) = g(2t)$, una funzione con periodo π e serie di Fourier $\sum_j c_j e^{2ijt}$. Sulla base di (1) (e senza nuovi integrali), calcolare i coefficienti c_j .
5. Sull'intervallo $-3\pi \leq t \leq 3\pi$, disegnare schizzi dei grafici di $f(t)$, di $g(t)$, di $f(t) + g(t)$, e di $h(t)$.
6. Verificare che le serie di Fourier di $f(t) + g(t)$ e di $h(t)$ coincidono, e spiegare perché deve essere così.

B. Siano $B \geq A > 0$ dati costanti interi.

1. Verificare che ad ogni punto le curve di livello di $Ax^2 + By^2$ e di x^B/y^A sono perpendicolari.
2. Su un singolo grafico schizzare alcune delle curve di livello delle due funzioni quando $B = A = 1$.
3. Idem ma per $B = 2, A = 1$.

C. Si usino parametri q e r con $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{(1-q)} \\ rq \end{pmatrix}$. Calcolare $dA = dx dy$ come scalare per $dr dq$.

D. Siano E e F due esponenti costanti. Si consideri l'integrale

$$\iint_{x,y \geq 0} x^E y^F e^{-x-y} dA$$

1. Calcolare l'integrale con le coordinate rettangolari (x e y).
2. Calcolarlo ancora con i parametri (q e r) del esercizio precedente. L'esito risulta un multiplo di $B(F, E) = \int_{t=0}^1 t^F (1-t)^E dt$.
3. Verificare che le due risposte coincidono quando $E = 1$.

1/9

A) ①

$$\begin{aligned} \int t e^{kt} dt &= t \left(\frac{1}{k} e^{kt} \right) - \int 1 \cdot \frac{1}{k} e^{kt} dt \\ &= \frac{1}{k} t e^{kt} - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k} e^{kt} = \frac{1}{k} t e^{kt} - \frac{1}{k^2} e^{kt} \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{Per } j \text{ intero } e^{\pm \pi i j} = (e^{\pm \pi i})^j = (-1)^j \quad \square$$

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i j t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\pi}^{\pi} t e^{-i j t} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{(-i j)} t e^{-i j t} - \frac{1}{(-i j)^2} e^{-i j t} \right]_{t=-\pi}^{\pi}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{(-i j)} \pi (-1)^j - \frac{1}{(-i j)^2} (-1)^j \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(-i j)} (-\pi) (-1)^j + \frac{1}{(-i j)^2} (-1)^j \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{(-i j)} (-1)^j = \frac{(-1)^j}{(-i j)} = \frac{(-1)^j i}{j} \quad \square$$

per $j \neq 0$,

(2/9)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{t^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(2) \quad g(t) = f(t-\pi) = \sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j i}{j} e^{i j (t-\pi)}$$

$$= \sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j i}{j} e^{i j t} e^{-\pi i j}$$

$$= \sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j i}{j} (-1)^j e^{i j t} = \sum_{j \neq 0} \frac{i}{j} e^{i j t}$$

$$b_j = \begin{cases} i/j & \text{per } j \neq 0 \\ 0 & \text{per } j = 0 \end{cases}$$

(3) I coefficienti di Fourier di $f(t)+g(t)$ sono

$$a_j + b_j = \frac{(-1)^j i}{j} + \frac{i}{j} = \frac{i}{j} [(-1)^j + 1]$$

$$= \begin{cases} 2i/j & \text{per } j \text{ pari} \\ 0 & \text{per } j \text{ dispari} \end{cases}$$

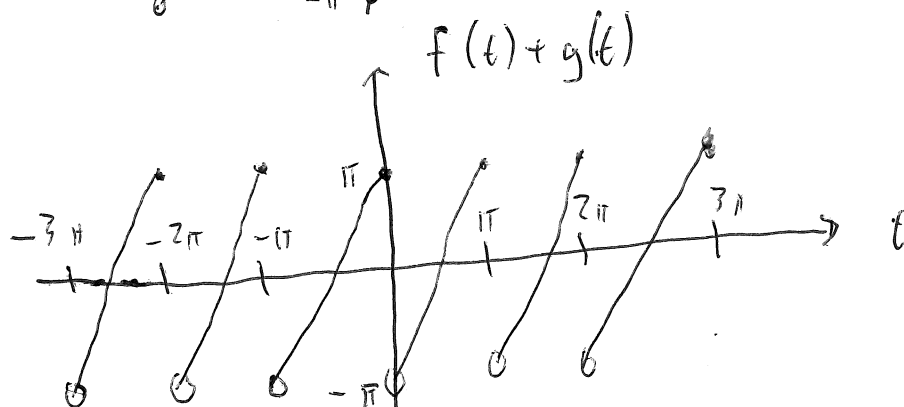
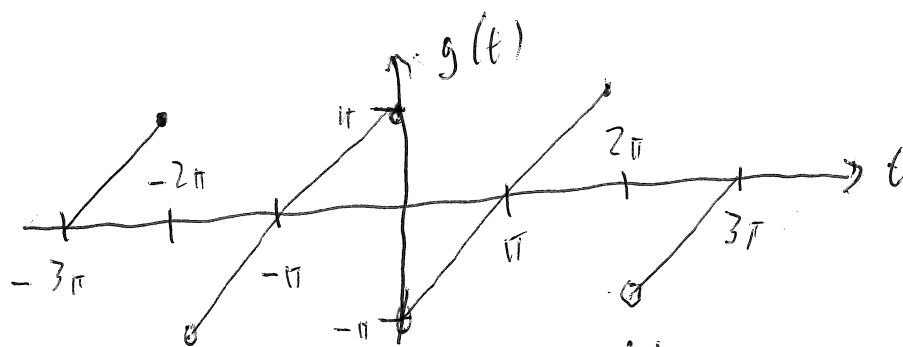
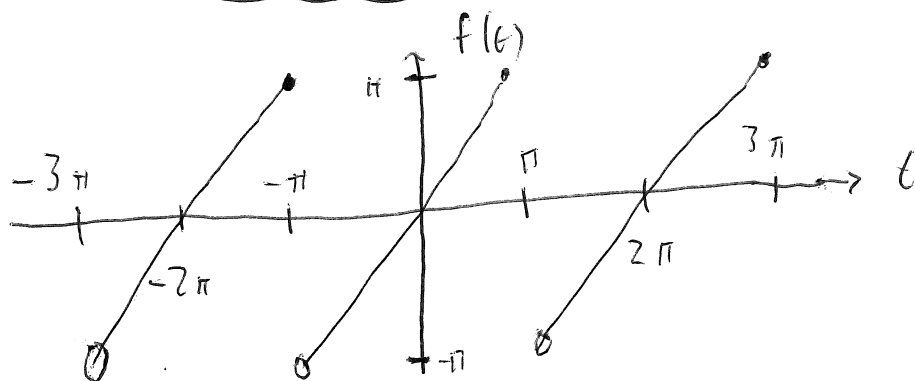
3/9

④ $h(t) = g(2t) = \sum_{j \neq 0} \frac{j}{j} e^{i j (2t)}$

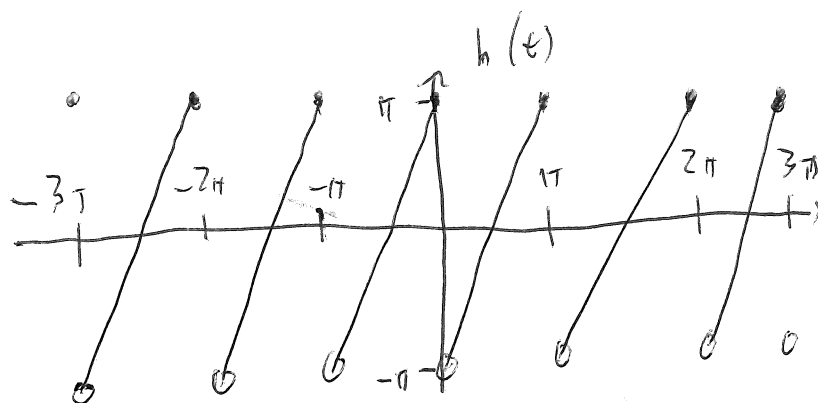
$$= \sum_{j \neq 0} \frac{j}{j} e^{2 i j t}$$

$$c_j = \begin{cases} i/j & \text{re } j \neq 0 \\ 0 & \text{re } j = 0 \end{cases}$$

⑤



4/9



Per $f(t) + g(t)$, è più facile
fare la somma con i grafici
che con le formule

⑥ Il perché è facile: dai
grafici si vede che $f(t) + g(t) = h(t)$,
e perciò le due serie di Fourier
devono coincidere

$$h(t) = \sum_{j \neq 0} \frac{i}{j} e^{2ij t} = \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k \text{ pari}}} \frac{i}{k/2} e^{ikt}$$

dove $k = 2j, j = k/2$

$$= \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k \text{ pari}}} \frac{2i}{k} e^{ikt}$$

5/9

$$e \quad f(t) + g(t) = \sum_{\substack{j \neq 0 \\ j \text{ pari}}} \frac{z_j}{j} e^{jst}$$

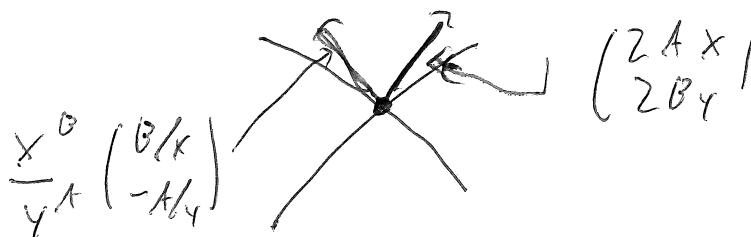
Le due serie coincidono: non importa che la prima usa k come indice e la seconda usa j .

$$\boxed{B} \quad \textcircled{1} \quad \underline{\nabla} (Ax^2 + By^2) = \begin{pmatrix} 2Ax \\ 2By \end{pmatrix}$$

$$\underline{\nabla} (x^B / y^A) = \begin{pmatrix} B x^{B-1} / y^A \\ -A x^B / y^{A+1} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{x^B}{y^A} \begin{pmatrix} B/x \\ -A/y \end{pmatrix}$$

Al punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ questi due gradienti sono perpendicolari alle due curve di livello.



6/9

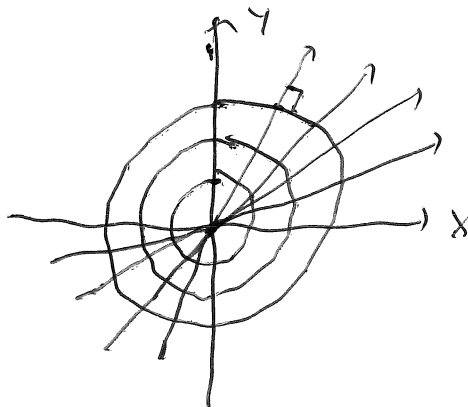
Sono anche perpendicolari l'uno con l'altro.

$$\begin{pmatrix} 2Ax \\ 2By \end{pmatrix} \cdot \frac{x^0}{y^1} \begin{pmatrix} B/x \\ -A/y \end{pmatrix} \\ = \frac{x^0}{y^1} (2AB - 2AB) = 0$$

Dunque le due curve di livello sono perpendicolari.

$$(2) \quad |x^2 + y^2 = Q^2 \rightarrow x^2 + y^2 = Q^2$$

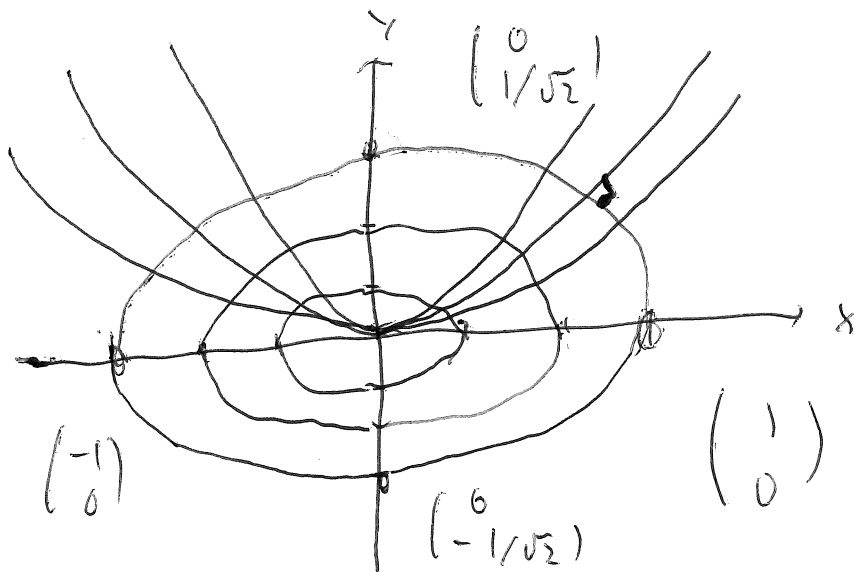
$$\frac{x^1}{y^1} = \frac{1}{m} \leadsto y = mx$$



$$(3) \quad |x^2 + 2y^2 = Q^2 \rightarrow x^2 + (\sqrt{2}y)^2 = Q^2$$

$$\frac{x^2}{y} = \frac{1}{k} \leadsto y = kx^2$$

7/9



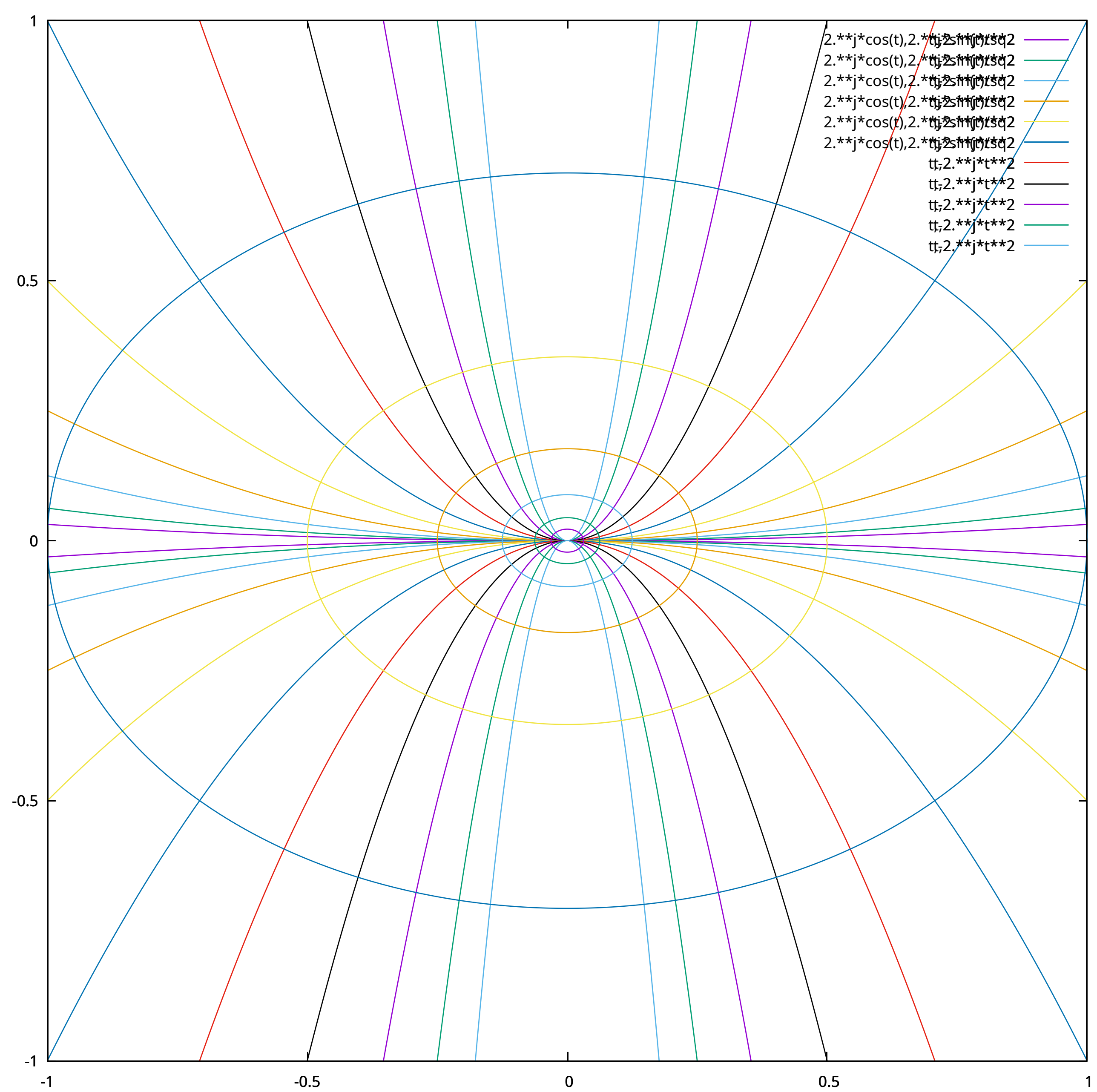
[C] $\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} 1-q & -m \\ q & +m \end{pmatrix}$

$$= (1-q)m - q(-m) = m$$

onde $dA = m \, dm \, dq$

[D] ① $\int \int_{x, y \geq 0} x^E y^F e^{-x-y} dA$

$$= \int_{x=0}^{+\infty} \left(\int_{y=0}^{+\infty} x^E y^F e^{-x} e^{-y} dy \right) dx$$



8/9

$$= \int_{x=0}^{+\infty} x^E e^{-x} \left(\int_{y=0}^{+\infty} y^F e^{-y} dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{+\infty} x^E e^{-x} \cdot F! \, dx = E! F!$$

$$(2) \quad x, y \geq 0 \rightsquigarrow x+y \geq 0 \rightsquigarrow m(1-q) + mq \geq 0 \\ \rightsquigarrow m \geq 0$$

$$x \geq 0 \rightsquigarrow m(1-q) \geq 0 \rightsquigarrow 1-q \geq 0 \rightsquigarrow q \leq 1$$

$$y \geq 0 \rightsquigarrow mq \geq 0 \rightsquigarrow q \geq 0$$

$$\iint_{x,y \geq 0} x^E y^F e^{-x-y} \, dA$$

$$x, y \geq 0$$

$$= \int_{q=0}^1 \left(\int_{m=0}^{+\infty} (m(1-q))^E (mq)^F e^{-m} m \, dm \right) dq$$

$$= \int_{q=0}^1 (1-q)^E q^F \left(\int_{m=0}^{+\infty} m^{E+F+1} e^{-m} \, dm \right) dq$$

$$= (E+F+1)! \int_{q=0}^1 (1-q)^E q^F \, dq$$

9/9

$$= (E+F+1)! B(F, E)$$

(3) Let $E=1$, $E! F! = 1! F! = (F!)$

$$(E+F+1)! \int_{t=0}^1 t^F (1-t)^E dt$$

$$= (F+2)! \int_{t=0}^1 t^F (1-t) dt$$

$$= (F+2)! \int_{t=0}^1 t^F - t^{F+1} dt$$

$$= (F+2)! \left(\frac{1}{F+1} - \frac{1}{F+2} \right)$$

$$= \frac{(F+2)!}{(F+1)(F+2)} = \frac{(F+2)(F+1)F!}{(F+2)(F+1)} = (F!)$$