

Analisi 2, Ingegneria (Steger)

Prova Scritta di 25 settembre 2025

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con ragionevoli soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad z = z \quad dx \, dy \, dz = R \, dR \, d\theta \, dz$$

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

A. All'inizio $f(t)$ rappresenta una funzione qualsiasi con periodo R e serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R}$$

1. Sia $g(t)$ la funzione di periodo $2R$ definita da:

$$g(t) = \begin{cases} f(t - R/2) & \text{se } 0 \leq t \leq R \\ f(R/2 - t) & \text{se } -R \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Calcolare la serie di Fourier di $g(t)$ (i cui coefficienti si esprimono in termini dei coefficienti di Fourier di $f(t)$).

2. Adesso poniamo che:

$$f(t) = t \quad \text{per } -R/2 < t \leq R/2$$

In questo caso fare schizzi di $f(t)$ per $-3R/2 \leq t \leq 3R/2$ e di $g(t)$ per $-3R \leq t \leq 3R$ — in ciascun caso per 3 periodi della funzione.

3. Calcolare i coefficienti di Fourier di $f(t)$ per la funzione particolare della parte precedente. (Non dimenticare il caso speciale di a_0).
4. Calcolare i coefficienti di Fourier di $g(t)$ sulla base di parte (1).

B. Trovare il massimo e il minimo di $x + 2y + 2z$ sotto i vincoli:

$$y \geq 1 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

C. In questo esercizio si usano le identità:

$$\begin{aligned}\cos(P + Q) &= \cos(P) \cos(Q) - \sin(P) \sin(Q) \\ \cos(P - Q) &= \cos(P) \cos(Q) + \sin(P) \sin(Q) \\ \sin(P + Q) &= \cos(P) \sin(Q) + \sin(P) \cos(Q) \\ \sin(P - Q) &= -\cos(P) \sin(Q) + \sin(P) \cos(Q)\end{aligned}$$

Siano A e B due parametri fissi.

1. Trovare il polinomio di Taylor di $\cos x$ in potenze di $x - A$ fino al terzo grado (inglobando termini di tipo $(x-A)^4$ e oltre in $O((x-A)^4)$). Altrettanto, senza ripetere i calcoli, trovare il polinomio di Taylor di $\cos(y)$ in potenze di $y - B$.
2. Trovare il polinomio di Taylor di $\sin x$ di terzo grado in potenze di $x - A$. Altrettanto, senza ripetere i calcoli, trovare il polinomio di Taylor di $\sin(y)$ in potenze di $y - B$.
3. Trovare il polinomio di Taylor di terzo grado di $\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$ in potenze di $x - A$ e $y - B$ usando gli esiti delle prime due parti. I termini da inglobare in $O(|x - A|^4 + |y - B|^4)$ sono i termini di grado 4: $(x - A)^4$, $(x - A)^3(y - B)$, $(x - A)^2(y - B)^2$, $(x - A)(y - B)^3$, $(y - B)^4$ e tutti i termini oltre quelli.
4. Usare le derivate parziali per trovare il polinomio di Taylor di terzo grado di $\cos(x + y)$ in termini di $(x - A)$ e $(y - B)$.
5. Verificare che le risposte a parti (3) e (4) coincidono.

D. Siano B e Q due parametri fissi con $0 < B < Q$ e sia $\mathcal{C}$ la calotta determinata dai vincoli:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq Q^2 \quad \text{e} \quad z \geq B$$

Schizzare un disegno di $\mathcal{C}$. Sia E un altro parametro fisso. Usare le coordinate cilindriche per calcolare

$$\iiint_{\mathcal{C}} z^E dV$$

Convieni organizzare l'integrale triplo in modo che il primo integrale sia quello dR .

(1/20)

A ①

$$g(t) = \sum_k b_k e^{\pi i k t / R}$$

$$\text{Con } b_n = \frac{1}{2R} \int_{t=-R}^R g(t) e^{-\pi i k t / R} dt$$

$$= \frac{1}{2R} \left(\int_{t=0}^R f(t-R/2) e^{-\pi i k t / R} dt \right.$$

$$\left. + \int_{t=-R}^0 f(R/2-t) e^{-\pi i k t / R} dt \right)$$

$$= \frac{1}{2R} \left(\int_{t=0}^R \sum_j a_j e^{2\pi i j (t-R/2) / R} \cdot e^{-\pi i k t / R} dt \right.$$

$$\left. + \int_{t=-R}^0 \sum_j a_j e^{2\pi i j (R/2-t) / R} \cdot e^{-\pi i k t / R} dt \right)$$

(2/20)

Si usa

$$e^{2\pi i j (-R/2)/R} = e^{-\pi i j} = (-1)^j$$

$$e^{2\pi i j (R/2)/R} = e^{\pi i j} = (-1)^j :$$

$$\begin{aligned} (*) b_k = \frac{1}{2R} & \left(\sum_j (-1)^j \int_{t=0}^R a_j e^{2\pi i j t/R} \cdot e^{-\pi i k t/R} dt \right. \\ & \left. + \sum_j (-1)^j \int_{t=R}^0 a_j e^{-2\pi i j t/R} \cdot e^{-\pi i k t/R} dt \right) \end{aligned}$$

Si valuta

$$\int_{t=0}^R e^{2\pi i j t/R} e^{-\pi i k t/R} dt$$

$$= \int_{t=0}^R e^{((2\pi i j - \pi i k)/R) t} dt$$

$$= \frac{R}{\pi i} \frac{1}{2j - k} e^{((2\pi i j - \pi i k)/R) t} \Big|_{t=0}^R$$

(3/20)

$$(re \quad k \neq 2j)$$

$$= \frac{R}{\pi i} \frac{1}{z_j - k} (e^{2\pi i j - \pi i k} - 1)$$

$$= \frac{R}{\pi i} \frac{1}{z_j - k} (1 - 1)$$

$$= \begin{cases} 0 & re \quad k \text{ è pari} \\ \frac{2R}{\pi i} \frac{1}{k - z_j} & re \quad k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\text{Inoltre, se } k = z_j$$

$$\int_{t=0}^R e^{((2\pi i j - \pi i k)/R)t} dt$$

$$= \int_{t=0}^R 1 dt = R$$

Alternativamente si valuta

$$\int_{t=-R}^0 e^{-2\pi i j t/R} e^{-\pi i k t/R} dt$$

(4/20)

$$= \int_{t=-R}^0 e^{((-2\pi i j - \pi i k)/R) \cdot t} dt$$

$$= -\frac{R}{\pi i} \frac{1}{2j+k} e^{((-2\pi i j - \pi i k)/R) \cdot t} \Big|_{t=-R}^0$$

(se $k \neq -2j$)

$$= -\frac{R}{\pi i} \frac{1}{k+2j} (1 - (-1)^k)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\frac{2R}{\pi i} \frac{1}{k+2j} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Inoltre, se $k = -2j$

$$\int_{t=-R}^0 e^{((-2\pi i j - \pi i k)/R) \cdot t} dt$$

$$= \int_{t=-R}^0 1 dt = R$$

5/20

Si procede dall'equazione $(*)$.

Ci sono due casi da fare:

k pari e k dispari. Se

k è pari, allora quando tutti gli integrali sono zero.

Contano solo il primo
integrali con $k = 2j$, ovvero

$j = k/2$ e il secondo

integrals con $k = -2j$, ovvero

$$j = -k/2.$$

$$b_k = \frac{1}{2R} \left((-1)^{k/2} a_{k/2} - R \right. \\ \left. + (-1)^{-k/2} a_{-k/2} - R \right)$$

$$= \frac{1}{2} (-1)^{k/2} (a_{k/2} + a_{-k/2})$$

(6/20)

Vice versa, se h è dispari
tutti gli integrali sono diversi
da zero, e da (*) si trova

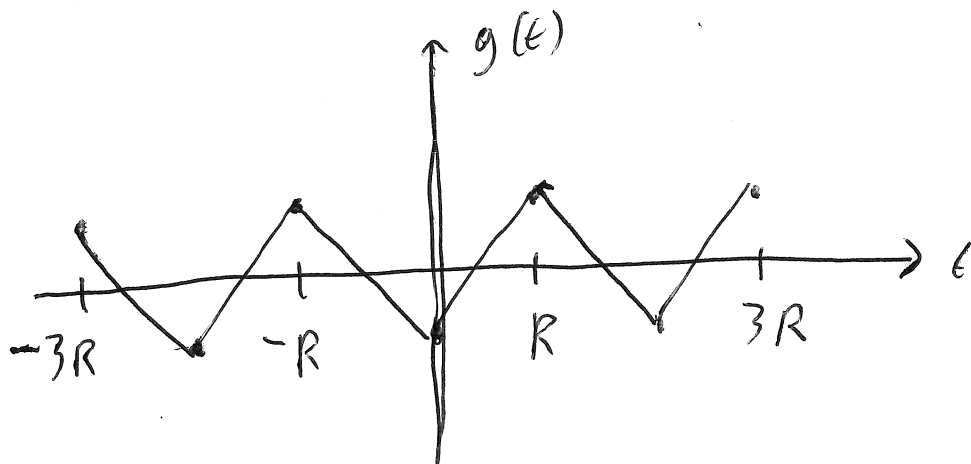
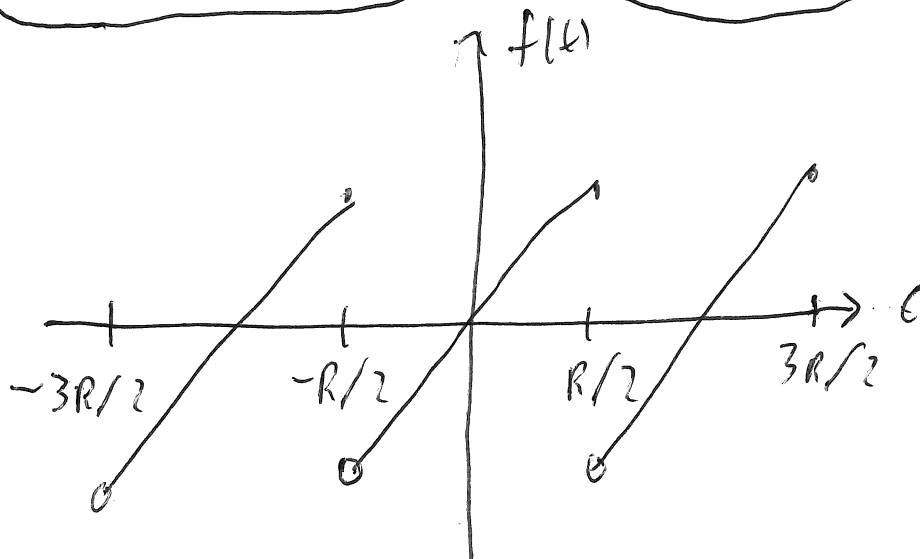
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2R} \left(\sum_j (-1)^j a_j \cdot \frac{2R}{\pi i} \cdot \frac{1}{h-z_j} \right. \\ &\quad \left. + \sum_j (-1)^j a_j \cdot \frac{-2R}{\pi i} \cdot \frac{1}{h+z_j} \right) \\ &= \sum_j (-1)^j a_j \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{h-z_j} - \frac{1}{h+z_j} \right) \\ &= \sum_j (-1)^j a_j \frac{1}{\pi i} \frac{4j}{h^2 - 4j^2} \\ &= \left(\frac{4}{\pi i} \sum_j (-1)^j a_j \cdot \frac{j}{h^2 - 4j^2} \right) \end{aligned}$$

7/20

$$= \frac{4}{\pi i} \sum_{j \geq 0} \left((-1)^j a_j - \frac{j}{h^2 - 4j^2} + (-1)^j a_{-j} - \frac{(-j)}{h^2 - 4(-j)^2} \right)$$

$$= \frac{4}{\pi i} \sum_{j \geq 0} (-1)^j (a_j - a_{-j}) \frac{j}{h^2 - 4j^2}$$

(2)



(8/20)

(3)

$$a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

$$= \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} t e^{-(2\pi i j / R) t} dt$$

$$= \frac{1}{R} \left(-\frac{R}{2\pi i j} \right) t e^{-(2\pi i j / R) t} \Bigg|_{t=-R/2}^{t=R/2}$$

$$- \frac{1}{R} \left(-\frac{R}{2\pi i j} \right)^2 e^{-(2\pi i j / R) t} \Bigg|_{t=-R/2}^{t=R/2}$$

(per $j \neq 0$, con l'uso

$$\text{di } \int t e^{kt} dt = \frac{1}{k} t e^{kt} - \frac{1}{k^2} e^{kt})$$

$$= \frac{1}{R} \left(-\frac{R}{2\pi i j} \right) \left[\frac{R}{2} (-1)^j - \left(-\frac{R}{2} \right) (-1)^j \right]$$

$$- \frac{1}{R} \left(-\frac{R}{2\pi i j} \right) \left[(-1)^j - (-1)^j \right]$$

$$(9/20)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i j} [R (-1)^j] = \left(-\frac{1}{2\pi i j} (-1)^j R \right)$$

Per $j=0$,

$$a_0 = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} t \cdot e^{-(2\pi i 0/R) \cdot t} dt$$

$$= \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} t dt = \frac{1}{R} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=-R/2}^{R/2}$$

$$= 0$$

(4) Per k pari

$$b_k = \frac{1}{2} (-1)^{k/2} (a_{k/2} + a_{-k/2})$$

$$= \frac{1}{2} (-1)^{k/2} \left(-\frac{1}{2\pi i (k/2)} (-1)^{k/2} R \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i (k/2)} (-1)^{-k/2} R \right)$$

$$(10/20)$$

$$= \frac{1}{2} R \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{-1}{h/2} + \frac{-1}{-h/2} \right)$$

$$= 0$$

Per k dispari

$$b_k = \frac{4}{\pi i} \sum_{j \geq 0} (-1)^j (a_j - a_{-j}) \frac{j}{h^2 - 4j^2}$$

$$= \frac{4}{\pi i} \sum_{j \geq 0} (-1)^j \left(-\frac{1}{2\pi i j} (-1)^j R - \frac{-1}{2\pi i (-j)} (-1)^j R \right)$$

$$\cdot \frac{j}{h^2 - 4j^2}$$

$$= \frac{4}{\pi i} \frac{1}{2\pi i} R \sum_{j \geq 0} \frac{-2}{j} \frac{j}{h^2 - 4j^2}$$

$$= \left(\frac{+4}{\pi^2} R \sum_{j \geq 0} \frac{1}{h^2 - 4j^2} \right)$$

11/20

È valida questa formula:

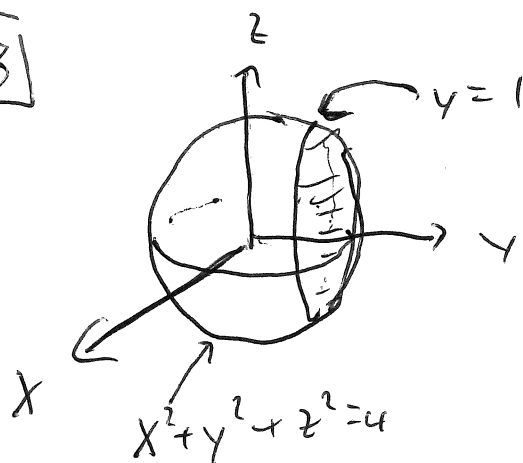
$$\sum_{j \neq 0} \frac{1}{k^2 - q_j^2} = -\frac{1}{2k^2}$$

recondo un calcolo non incluso qui. Dunque

$$b_k = -\frac{2}{\pi^2 k^2} R$$

sempre per k dispari.

[B]



Da massimizzare/minimizzare:

$$f(x, y, z) = x + 2x + 2y$$

sotto il vincolo $g(x, y, z) = 4$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

12/20

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \nabla f = \lambda \nabla g = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$x = 1/2 \lambda$$

$$y = 2/2 \lambda = \lambda$$

$$z = 2/2 \lambda = \lambda$$

$$\begin{aligned} 4 &= x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (\lambda)^2 + (\lambda)^2 \\ &= 9x^2 \leadsto x^2 = 4/9 \\ &\leadsto x = \pm 2/3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Il segno "-" si esclude poiché
ci vuole $y \geq 1$. Dunque

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \text{ è il punto}$$

critico con $f(2/3, 4/3, 4/3)$

$$= 2/3 + 8/3 + 8/3 = \textcircled{6}$$

Effettivamente, questo è il
massimo. Il minimo invece

13/20

si trova sulla frontiera, cioè
la circonferenza con

$$y=1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Allora $f(x, 1, z) = x + 2 + 2z$

e $g(x, 1, z) = x^2 + 1 + z^2.$

Si cerca il minimo (e il
massimo) con solo due variabili,

x e z .

$$\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} = \nabla f = \lambda \nabla g = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{2\lambda}$$

$$z = \frac{z}{2\lambda} = 2x$$

$$4 = x^2 + 1 + z^2 = x^2 + 1 + (2x)^2 = 1 + 5x^2$$

$$\hookrightarrow 3 = 5x^2 \leadsto x^2 = 3/5 \rightarrow x = \pm \sqrt{3/5}$$

& punti critici sono

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \sqrt{3/5} \\ 1 \\ \pm 2\sqrt{3/5} \end{pmatrix}$$

14/20

che danno

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \pm \sqrt{3/5} + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (\pm 2 \sqrt{3/5}) \\ &= 2 \pm 5 \sqrt{3/5} = 2 \pm \sqrt{15} \end{aligned}$$

Il minimo di f è $2 - \sqrt{15}$.

Il massimo di f è 0 , come
calcolato precedentemente, in
quanto $2 + \sqrt{15} < 2 + \sqrt{16} = 6$.

C ①

$$d(\cos x)/dx = -\sin x$$

$$\cos x|_{x=A} = \cos(A)$$

$$-\sin x|_{x=A} = -\sin(A)$$

$$d^2(\cos x)/dx^2 = -\cos x$$

$$-\cos x|_{x=A} = -\cos(A)$$

$$d^3(\cos x)/dx^3 = \sin x$$

$$\sin x|_{x=A} = \sin(A)$$

ovvero

$$\cos(x) = \cos(A) - \sin(A) \frac{(x-A)}{1!} - \cos(A) \frac{(x-A)^2}{2!}$$

$$+ \sin(A) \frac{(x-A)^3}{3!} + \mathcal{O}(x-A)^4$$

$$= \cos(A) - \sin(A)(x-A) - \cos(A)(x-A)^2/2 + \sin(A)(x-A)^3/6 + \mathcal{O}(x-A)^4$$

15/20

Altrettanto

$$\cos(y) = \cos(\theta) - \sin(\theta)(y-\theta) - \cos(\theta)(y-\theta)^2/2 + \sin(\theta)(y-\theta)^3/6 + \mathcal{O}(y-\theta)^4$$

(2)

$$\sin x|_{x=A} = \sin(A)$$

$$d(\sin x)/dx = \cos x$$

$$\cos x|_{x=A} = \cos(A)$$

$$d^2(\sin x)/dx^2 = -\sin x$$

$$-\sin x|_{x=A} = -\sin(A)$$

$$d^3(\sin x)/dx^3 = -\cos x$$

$$-\cos x|_{x=A} = -\cos(A)$$

onde

$$\sin(x) = \sin(A) + \cos(A)(x-A) - \sin(A)(x-A)^2/2 - \cos(A)(x-A)^3/6 + \mathcal{O}(x-A)^4$$

e altrettanto

$$\sin(y) = \sin(\theta) + \cos(\theta)(y-\theta) - \sin(\theta)(y-\theta)^2/2 - \cos(\theta)(y-\theta)^3/6 + \mathcal{O}(y-\theta)^4$$

16/20

$$\textcircled{3} \quad \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$= \left(\cos(A) - \sin(A)(x-A) - \cos(A) \frac{(x-A)^2}{2} + \sin(A) \frac{(x-A)^3}{6} + \mathcal{O}(x-A)^4 \right)$$

$$+ \left(\cos(B) - \sin(B)(y-B) - \cos(B) \frac{(y-B)^2}{2} + \sin(B) \frac{(y-B)^3}{6} + \mathcal{O}(y-B)^4 \right)$$

$$- \left(\sin(A) + \cos(A)(x-A) - \sin(A) \frac{(x-A)^2}{2} - \cos(A) \frac{(x-A)^3}{6} + \mathcal{O}(x-A)^4 \right)$$

$$+ \left(\sin(B) + \cos(B)(y-B) - \sin(B) \frac{(y-B)^2}{2} - \cos(B) \frac{(y-B)^3}{6} + \mathcal{O}(y-B)^4 \right)$$

$$= \left(\cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B) \right)$$

$$+ \left(-\sin(A) \cos(B) - \cos(A) \sin(B) \right) (x-A)$$

$$+ \left(-\cos(A) \sin(B) - \sin(A) \cos(B) \right) (y-B)$$

$$+ \left(-\cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B) \right) (x-A)^2/2$$

$$+ \left(\sin(A) \sin(B) - \cos(A) \cos(B) \right) (x-A)(y-B)$$

$$+ \left(-\cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B) \right) (y-B)^2/2$$

$$+ \left(\cos(B) \sin(A) + \sin(B) \cos(A) \right) (x-A)^3/6$$

$$+ \left(\cos(A) \sin(B) + \sin(A) \cos(B) \right) (x-A)^2(y-B)/2$$

$$+ \left(\sin(A) \cos(B) + \cos(A) \sin(B) \right) (x-A)(y-B)^2/2$$

$$+ \left(\cos(A) \sin(B) + \sin(A) \cos(B) \right) (y-B)^3/6$$

$$+ \mathcal{O}(x-A)^4 + \mathcal{O}(x-A)^3(y-B) + \mathcal{O}(x-A)^2(y-B)^2)$$

$$+ \mathcal{O}(x-A)(y-B)^3) + \mathcal{O}(y-B)^4$$

17/20

$$\approx \cos(A+B)$$

$$-(\sin(A+B))(x-A) - (\sin(A+B))(y-B)$$

$$-(\cos(A+B))(x-A)^2/2 - (\cos(A+B))(x-A)(y-B)$$

$$-(\cos(A+B))(y-B)^2/2$$

$$+(\sin(A+B))(x-A)^3/6 + (\sin(A+B))(x-A)^2(y-B)/2$$

$$+(\sin(A+B))(x-A)(y-B)^2/2 + (\sin(A+B))(y-B)^3/6$$

$$+ O((x-A)^4) + O((x-A)^3(y-B)) + O((x-A)^2(y-B)^2)$$

$$+ O((x-A)(y-B)^3) + O((y-B)^4)$$

$$(4) \quad \cos(x+y) \Big|_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}} = \cos(A+B)$$

$$\frac{\partial \cos(x+y)}{\partial x} = \frac{\partial \cos(x+y)}{\partial y} = -\sin(x+y)$$

$$-\sin(x+y) \Big|_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}} = -\sin(A+B)$$

$$\frac{\partial^2 \cos(x+y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \cos(x+y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \cos(x+y)}{\partial y^2} = -\cos(x+y)$$

18/20

$$-\cos(x+y) \Big|_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}} = -\cos(A+B)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \cos(x+y)}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 \cos(x+y)}{\partial x^2 \partial y} \\ &= \frac{\partial^3 \cos(x+y)}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 \cos(x+y)}{\partial y^3} \\ &= \sin(x+y) \end{aligned}$$

$$\sin(x+y) \Big|_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}} = \sin(A+B)$$

Risultato:

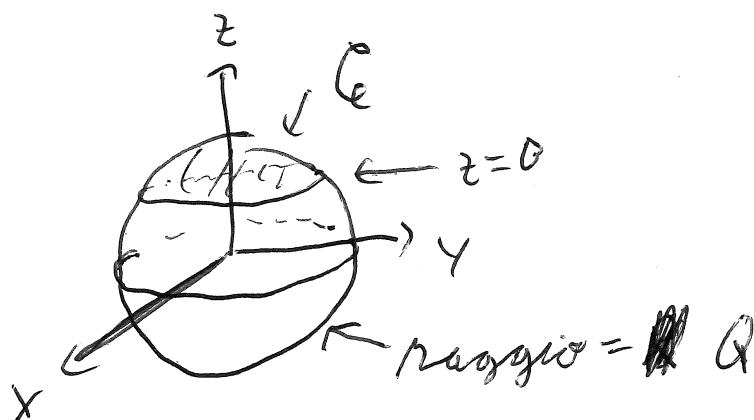
$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(A+B) - \frac{\sin(A+B)(x-A)}{1! 0!} - \frac{\sin(A+B)(y-B)}{0! 1!} \\ &\quad - \frac{\cos(A+B)}{2! 0!} (x-A)^2 - \frac{\cos(A+B)(x-A)(y-B)}{1! 1!} - \frac{\cos(A+B)}{0! 2!} (y-B)^2 \\ &\quad + \frac{\sin(A+B)}{3! 0!} (x-A)^3 + \frac{\sin(A+B)}{2! 1!} (x-A)^2 (y-B) \\ &\quad + \frac{\sin(A+B)}{1! 2!} (x-A)(y-B)^2 + \frac{\sin(A+B)}{0! 3!} (y-B)^3 \\ &\quad + \mathcal{O}((x-A)^4) + \mathcal{O}((x-A)^3(y-B)) + \mathcal{O}((x-A)^2(y-B)^2) + \mathcal{O}((x-A)(y-B)^3) \\ &\quad + \mathcal{O}(y-B)^4 \end{aligned}$$

19/20

⑤ Effettivamente, le risposte alle parti ③ e ④ coincidono, e devono coincidere poiché

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y).$$

④



$$x^2 + y^2 + z^2 \leq Q^2 \leadsto R^2 + z^2 \leq Q^2$$

$$\leadsto R^2 \leq Q^2 - z^2 \leadsto R \leq \sqrt{Q^2 - z^2}$$

$$B \leq z \leq Q$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$\iiint_C z^E dV = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{z=B}^Q \left(\int_{R=0}^{\sqrt{Q^2-z^2}} z^E R dR \right) dz \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{z=B}^Q z^E \frac{1}{2} (\sqrt{Q^2 - z^2})^2 dz$$

20/20

$$= \pi \int_{z=B}^Q z^E (Q^2 - z^2) dz$$

$$= \pi \left[\frac{z^{E+1} Q^2}{E+1} - \frac{z^{E+3}}{E+3} \right]_{z=B}^Q$$

$$= \pi \left[\frac{Q^{E+1} Q^2}{E+1} - \frac{Q^{E+3}}{E+3} - \frac{B^{E+1} Q^2}{E+1} + \frac{B^{E+3}}{E+3} \right]$$

$$= \frac{\pi}{(E+1)(E+3)} \left[2Q^{E+3} - (E+3)B^{E+1}Q^2 + (E+1)B^{E+3} \right]$$