

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Ingegneria (Steger)

Prova Scritta di 9 settembre 2025

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggregati capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con ragionevoli soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad z = z \quad dx dy dz = R dR d\theta dz$$

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A. All'inizio, $f(t)$ rappresenta una funzione qualsiasi.

1. Sia A una costante. Far vedere il calcolo della trasformata di Fourier di $g(t) = f(t - A)$ in termini della trasformata di Fourier di $f(t)$ (cioè di $\hat{g}(t)$ in termini di $\hat{f}(t)$).
2. Sia $B > 0$ una costante. Far vedere il calcolo della trasformata di Fourier di $h(t) = f(t/B)$ in termini della trasformata di Fourier di $f(t)$ (cioè di $\hat{h}(t)$ in termini di $\hat{f}(t)$).
3. Ora, si consideri la funzione specifica

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 1 & -1 \leq t \leq +1 \\ 0 & t > +1 \end{cases}$$

Calcolare $\hat{f}(\omega)$, espressa usando un seno (e non usando degli esponenziali complessi.)

4. Sulla base di (1) e (3), calcolare le trasformate di Fourier di

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t < -3 \\ 1 & -3 \leq t \leq -1 \\ 0 & t > -1 \end{cases}$$

e

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & t < +1 \\ 1 & +1 \leq t \leq +3 \\ 0 & t > +3 \end{cases}$$

5. Schizzare un grafico di $f_1 + f + f_2$. Poi, sulla base di (2) e (3), calcolare la trasformata di Fourier di $f_1 + f + f_2$.
6. Verificare che la trasformata di Fourier di $f_1 + f + f_2$ è uguale a $\hat{f}_1 + \hat{f} + \hat{f}_2$.

B. Trovare il massimo e il minimo di $z + 3x$ sotto i vincoli:

$$z \geq 1 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

C. Sia $Q > 0$ un parametro fisso. Esprimiamo un punto sulla superficie di sfera definita da $x^2 + y^2 + z^2 = Q^2$ con le coordinate cilindriche:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ \sqrt{Q^2 - R^2} \end{pmatrix}$$

1. Verificare che la data formula dá un punto sulla superficie di sfera.
2. Calcolare l'elemento di area, dS , sulla superficie di sfera in termini di $dR d\theta$.

D. Siano B e Q due parametri fissi con $0 < B < Q$. Usare le coordinate cilindriche e calcolare l'integrale di z sulla parte della superficie di sfera data da

$$x^2 + y^2 + z^2 = Q^2 \qquad \text{e} \qquad z \geq B$$

(Prima di tutto, conviene calcolare il limite superiore per R .)

1/8

A ①

$$\hat{g}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t-A) e^{-i\omega t} dt$$

$$\begin{array}{l} t = u + A \\ dt = du \end{array} = \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u+A)} du$$

$$= e^{-i\omega A} \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\omega u} du$$

$$= e^{-i\omega A} \hat{f}(\omega)$$

② $\hat{h}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t) e^{i\omega t} dt$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t/b) e^{-i\omega t} dt$$

$$\begin{array}{l} t = bv \\ dt = b dv \end{array} = \int_{v=-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega bv} \cdot b dv$$

2/8

$$= \int_{v=-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i(\omega v)} dv$$

$$= \hat{f}(\omega)$$

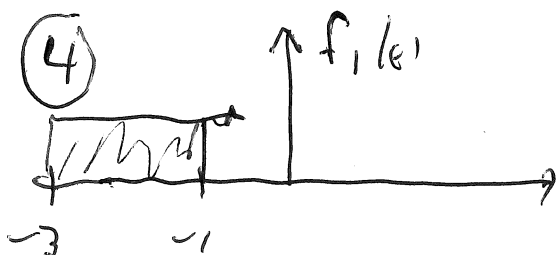
$$(3) \quad \hat{f}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

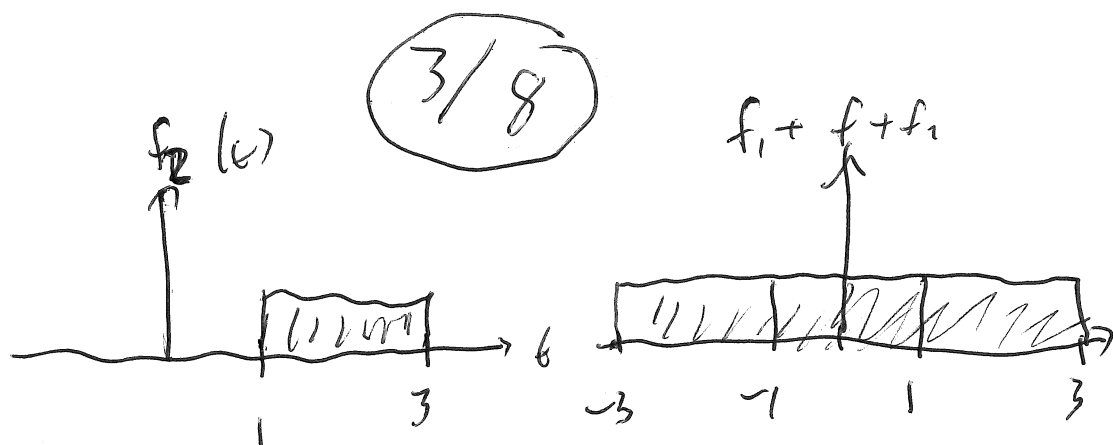
$$= \int_{t=-1}^1 -e^{-i\omega t} dt$$

$$= \left. \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \right|_{t=-1}^1 = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega} - e^{i\omega})$$

$$= \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i\omega} = \left(\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \right) \left(\frac{2}{\omega} \right)$$

$$= \frac{2}{\omega} \sin(\omega)$$





$$f_1(t) = f(t+2)$$

$$\rightarrow \hat{f}_1(\omega) = e^{2i\omega} \hat{f}(\omega) = \frac{2e^{2i\omega}}{\omega} \text{sen}(\omega)$$

$$f_2(t) = f(t-2)$$

$$\rightarrow \hat{f}_2(\omega) = e^{-2i\omega} \hat{f}(\omega) = \frac{2e^{-2i\omega}}{\omega} \text{sen}(\omega)$$

$$(5) (f_1 + f + f_2)(t) = f(t/3)$$

$$\hookrightarrow \widehat{f_1 + f + f_2}(\omega) = 3 \hat{f}(3\omega) = \frac{3 \cdot 2}{3\omega} \text{sen}(3\omega)$$

$$= \frac{6}{3\omega} \text{sen}(3\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}(3\omega)$$

$$(6) \hat{f}_1 + \hat{f} + \hat{f}_2 = (e^{2i\omega} + 1 + e^{-2i\omega}) \frac{2}{\omega} \text{sen}(\omega)$$

$$\widehat{f_1 + f_2 + f_3} = \text{sen}(3\omega) \frac{2}{\omega}$$

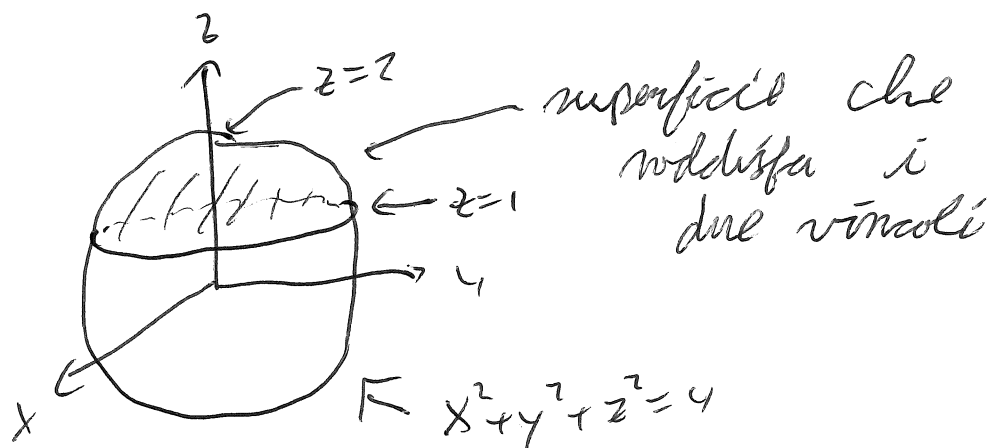
4/8

In quanto

$$\begin{aligned} & (e^{2i\omega} + 1 + e^{-2i\omega}) \operatorname{Re}(\omega) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{2i\omega} + 1 + e^{-2i\omega}) (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{3i\omega} + e^{i\omega} + e^{-i\omega} - e^{i\omega} - e^{-i\omega} - e^{-3i\omega}) \\ &= \frac{1}{2i} (e^{3i\omega} - e^{-3i\omega}) = \operatorname{Im}(3\omega) \end{aligned}$$

le due espressioni sono uguali

(B)



$$\nabla (z + 3x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \begin{pmatrix} x^2 \\ +y^2 \\ +z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

5/8

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \leadsto \begin{array}{l} 2\lambda x = 3 \\ 2\lambda y = 0 \\ 2\lambda z = 1 \end{array}$$

$$\leadsto \begin{array}{l} x = 3z \\ y = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 4 &= x^2 + y^2 + z^2 = (3z)^2 + 0^2 + z^2 \\ &= 10z^2 \leadsto z = \sqrt{\frac{4}{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

In quanto $\frac{2}{\sqrt{10}} < 1$, non occorre considerare questo caso. Invece occorre considerare la frontiera, la circonferenza dove $z=1$.

$$\nabla(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \begin{array}{l} 3 = 2\lambda_1 x \leadsto \lambda_1 \neq 0 \\ 0 = 2\lambda_1 y \leadsto y = 0 \\ 1 = 2\lambda_1 z + \lambda_2 \end{array} \end{aligned}$$

6/8

$$4 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 0^2 + 1$$

$$\rightarrow 3 = x^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow z + 3x = \textcircled{1 + 3\sqrt{3}}$$

il massimo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow z + 3x = \textcircled{1 - 3\sqrt{3}}$$

il minimo

C ①

$$\begin{aligned} & (R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2 + (\sqrt{Q^2 - R^2})^2 \\ &= R^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + (Q^2 - R^2) \\ &= R^2 + Q^2 - R^2 = Q^2; \end{aligned}$$

La parametrizzazione con parametri θ e R dà punti che soddisfanno $x^2 + y^2 + z^2 = Q^2$

7/8

(2)

$$\frac{\partial}{\partial R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial R} \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ \sqrt{a^2 - R^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -R/\sqrt{a^2 - R^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ \sqrt{a^2 - R^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -R/\sqrt{a^2 - R^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -R/\sqrt{a^2 - R^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= R \begin{pmatrix} +R \cos \theta / \sqrt{a^2 - R^2} \\ +R \sin \theta / \sqrt{a^2 - R^2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

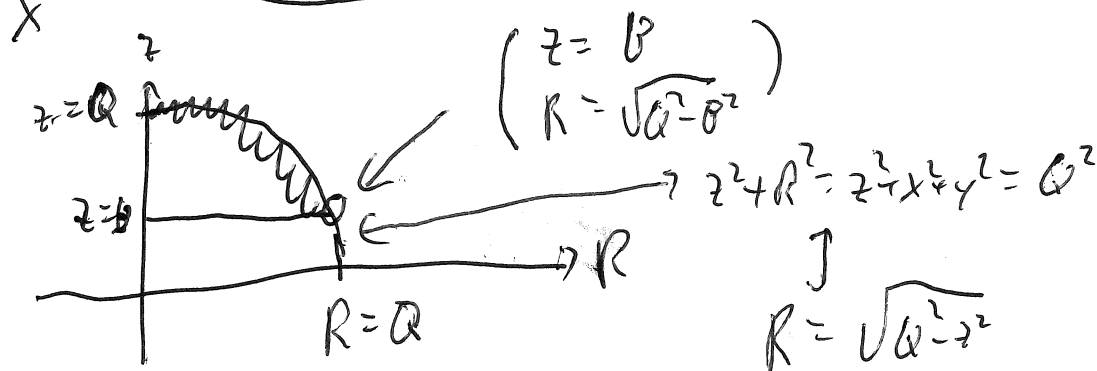
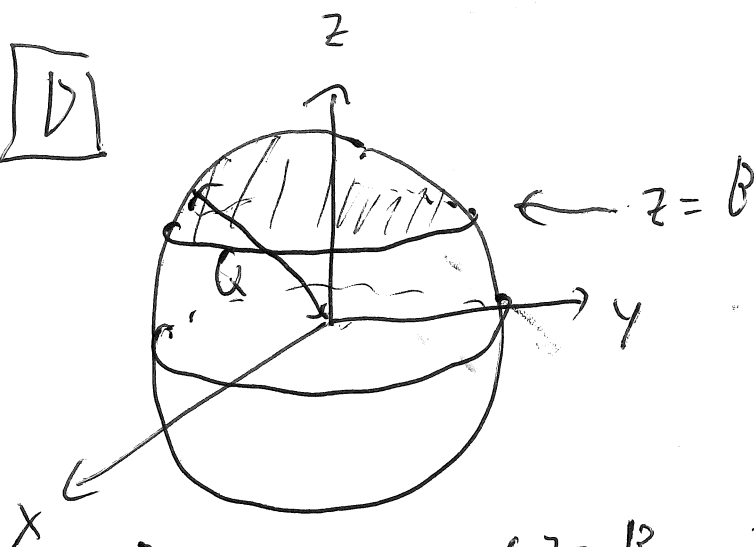
$$\left| R \begin{pmatrix} R \cos \theta / \sqrt{a^2 - R^2} \\ R \sin \theta / \sqrt{a^2 - R^2} \\ 1 \end{pmatrix} \right| = R \sqrt{\frac{R^2}{a^2 - R^2} \cos^2 \theta + \frac{R^2}{a^2 - R^2} \sin^2 \theta + 1}$$

$$= R \sqrt{\frac{R^2}{a^2 - R^2} + 1} = R \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - R^2}} = \frac{aR}{\sqrt{a^2 - R^2}}$$

$$dS = \frac{aR}{\sqrt{a^2 - R^2}} dR d\theta$$

8/8

151



$$\iint_{\substack{x^2+y^2+z^2=Q^2 \\ z \geq b}} z \, dS$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_{R=0}^{\sqrt{Q^2-b^2}} \sqrt{Q^2-R^2} \cdot \frac{QR}{\sqrt{Q^2-R^2}} dR \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{Q^2-b^2}} QR \, dR = 2\pi Q \frac{1}{2} (\sqrt{Q^2-b^2})^2$$

$$= \pi Q (Q^2 - b^2)$$