

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Ingegneria (Steger)

Prova Scritta di 30 luglio 2025

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con ragionevoli soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

A. Sia $f_1(t)$ la funzione periodica con periodo 2π data da:

$$f_1(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi \leq t < 0 \\ +1 & \text{se } 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Si prende per buona la formula:

$$f_1(t) = \frac{2}{i\pi} \sum_{j \text{ dispari}} \frac{1}{j} e^{ijt} \quad (1)$$

per la serie di Fourier di f_1 .

1. Calcolare l'antiderivata di ambedue i lati di (1) e trovare una formula per:

$$f_2(t) = \frac{2}{i\pi} \sum_{j \text{ dispari}} \frac{1}{j} \left(\frac{1}{ij}\right) e^{ijt} \quad (2)$$

simile alla formula per f_1 . (Indicazione: si tenga conto che il 0-esimo coefficiente di Fourier a destra sparisce. È questo che determina la costante additiva nell'antiderivata a sinistra.)

2. Ripetere: calcolare l'antiderivata di ambedue i lati di (2) e trovare una formula per:

$$f_3(t) = \frac{2}{i\pi} \sum_{j \text{ dispari}} \frac{1}{j} \left(\frac{1}{ij}\right)^2 e^{ijt} \quad (3)$$

simile alle formule per f_1 e f_2 .

3. Disegnare (schizzi) di grafici di f_1 , f_2 , e f_3 sull'intervallo $-\pi \leq t \leq \pi$.
4. Sulla base di (3) e la periodicità, disegnare (schizzi) di grafici di f_1 , f_2 , e f_3 sull'intervallo $-5\pi \leq t \leq 5\pi$.
5. Riscrivere la serie di Fourier di f_1 , equazione (1), con l'uso di seni al posto delle esponenziali e^{ijt} . Coseni non saranno necessari.
6. Riscrivere la serie di Fourier di f_2 , equazione (2), con l'uso di coseni al posto delle esponenziali e^{ijt} . Seni non saranno necessari.
7. Riscrivere la serie di Fourier di f_3 , equazione (3), con l'uso di seni al posto delle esponenziali e^{ijt} . Coseni non saranno necessari.

B. Siano

$$s = xy$$

$$t = yz$$

$$u = zx$$

Se $s = 2$, $t = 4$ e $u = 8$, e se $x, y, z > 0$, quali sono i valori corrispondenti di x , y , e z ? Per quei valori, calcolare $\partial(s, t, u)/\partial(x, y, z)$ e $\partial(x, y, z)/\partial(s, t, u)$.

C. Usare la formula per l'espansione di Taylor (attorno al punto $p = q = r = s = 0$) e trovare il coefficiente di p^2s nell'espansione di $(p + q + r + s + 3)^4$.

D. Sia $Q > 0$ un parametro fisso. Usare le coordinate rettangolari (x e y) e calcolare la media di xy sul quarto del disco definito da:

$$x, y \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq Q^2$$

~~1/11~~ 1/11

A 1

$$f_2(t) = \int -1 dt = -t + C_1 \quad (\text{per } -\pi \leq t < 0)$$

$$f_2(t) = \int 1 dt = t + C_2 \quad (\text{per } 0 \leq t < \pi)$$

$C_1 = C_2 = C$ perchè l'antiderivata è
continua per $t = 0$

$$0 = \int_{t=-\pi}^{\pi} f_2(t) dt = \int_{t=-\pi}^0 -t + C dt + \int_0^{\pi} t + C dt$$

$$= \left[-\frac{t^2}{2} + Ct \right]_{t=-\pi}^0 + \left[\frac{t^2}{2} + Ct \right]_{t=0}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + C\pi + \frac{\pi^2}{2} + C\pi = \pi^2 + 2C\pi = \pi(\pi + 2C)$$

$$\leadsto 0 = \pi + 2C \leadsto C = -\pi/2$$

2/11

WV

$$f_1(t) = -t - \frac{\pi}{2} \quad \text{per } -\pi \leq t < 0$$

$$f_2(t) = t - \frac{\pi}{2} \quad \text{per } 0 \leq t \leq \pi$$

$$(2) f_3(t) = \int -t - \frac{\pi}{2} dt = -\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}t + D_1$$

$$\text{per } -\pi \leq t < 0$$

$$f_3(t) = \int t - \frac{\pi}{2} = \frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}t + D_2$$

$$\text{per } 0 \leq t \leq \pi$$

$D_1 = D_2 = D$ perché l'antiderivata è
continua per $t = 0$.

$$0 = \int_{t=-\pi}^{\pi} f_3(t) dt = \int_{t=-\pi}^0 \left(-\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}t + D \right) dt$$

$$+ \int_{t=0}^{\pi} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2}t + D \right) dt$$

$$= -\frac{t^3}{6} \Big|_{t=-\pi}^0 - \frac{\pi}{4} t^2 \Big|_{t=-\pi}^0 + D t \Big|_{t=-\pi}^0 + \frac{t^3}{6} \Big|_{t=0}^{\pi} - \frac{\pi}{4} t^2 \Big|_{t=0}^{\pi} + D t \Big|_{t=0}^{\pi}$$

3/11

$$= -\pi^3 + \frac{\pi}{6} \pi^3 - D\pi + \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} \pi^2 - D\pi$$

$$= -2D\pi$$

$$\rightarrow 0 = -2D\pi \rightarrow D = 0$$

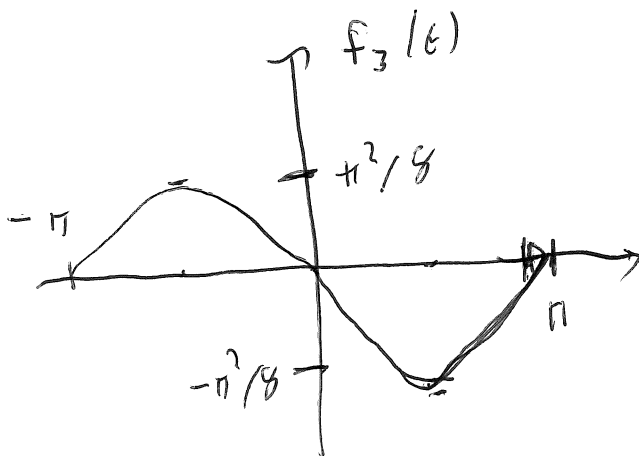
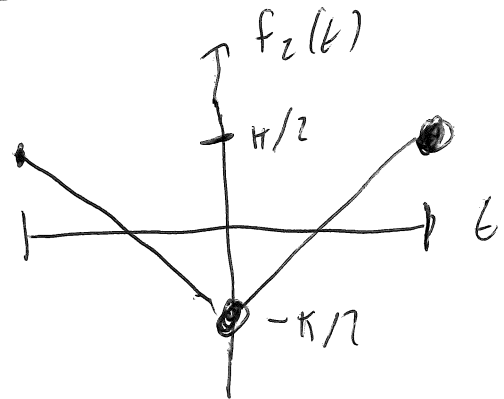
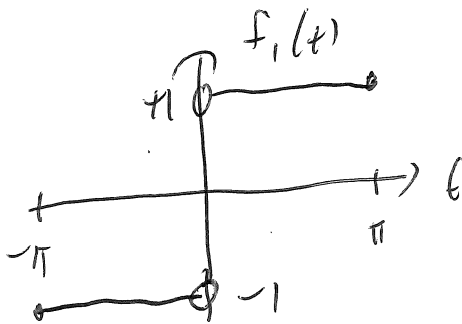
$$f_3(t) = -\frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2} t$$

$$\text{per } -\pi \leq t < 0$$

$$f_3(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{\pi}{2} t$$

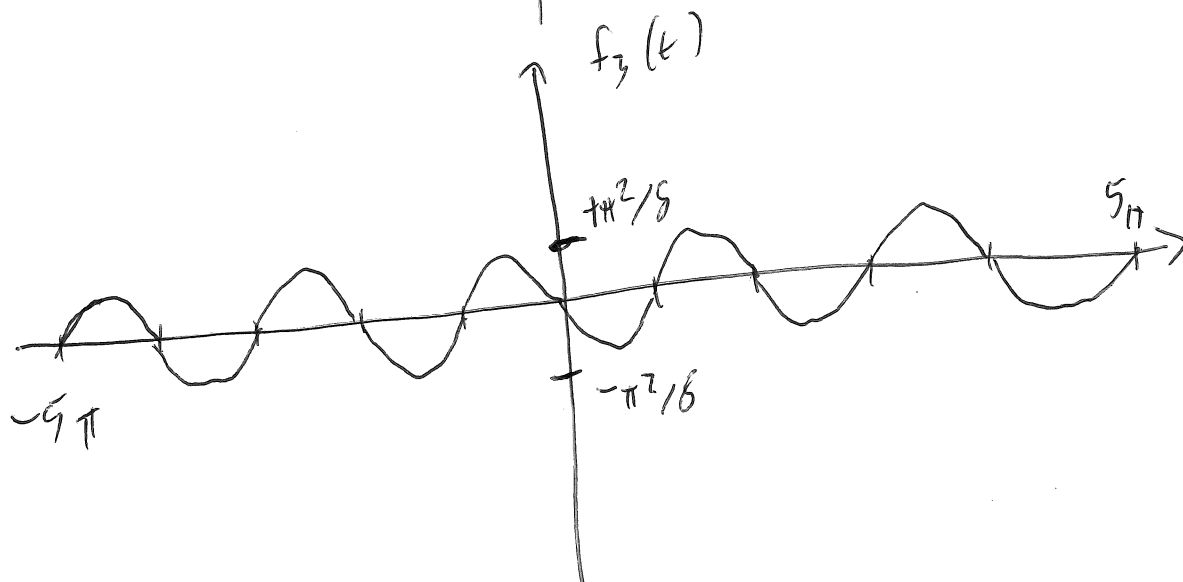
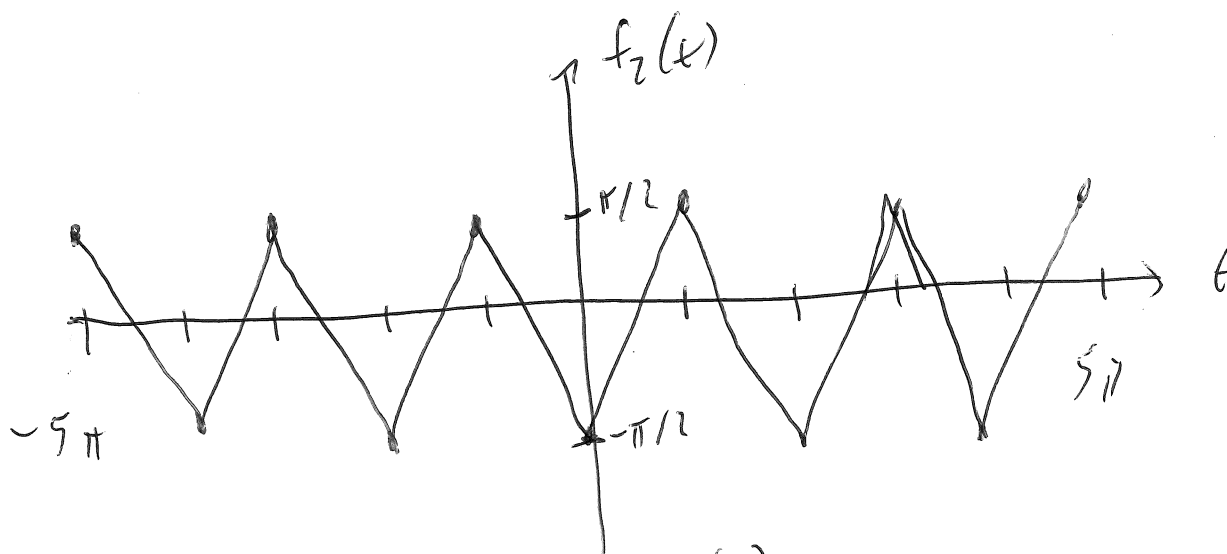
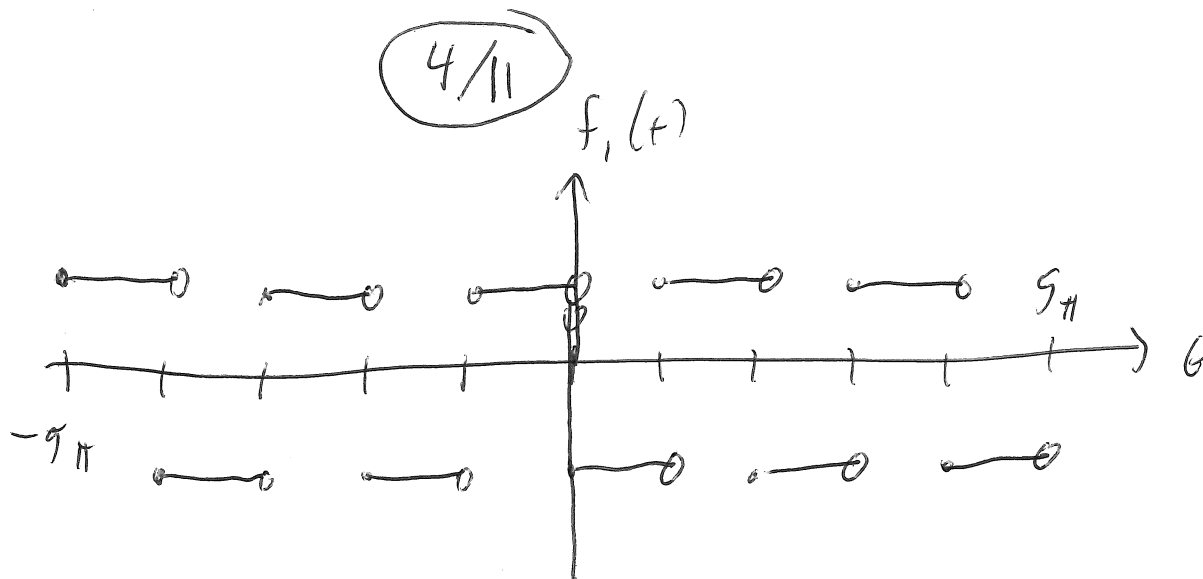
$$\text{per } 0 \leq t < \pi$$

(3)



4/11

(4)



$$(5) f_1(t) = \frac{2}{i\pi} \sum_{j \text{ dispari}} \frac{1}{j} e^{ijt} = \frac{2}{i\pi} \sum_{j \text{ dispari}} \frac{1}{j} (\cos(jt) + i \sin(jt))$$

5/11

$$= \frac{2}{i\pi} \sum_{\substack{j \text{ dispari} \\ j > 0}} \left(\frac{1}{j} \cos(te_j) + \frac{1}{-j} \cos(-te_j) \right) + \frac{i}{j} \sin(te_j) + \frac{i}{-j} \sin(-te_j)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{j \text{ dispari} \\ j > 0}} \frac{1}{j} \sin(te_j)$$

$$\textcircled{6} f_1(t) = \frac{2}{i\pi} \sum_{j \text{ dispari}} \frac{1}{j} \left(\frac{1}{ij} \right) e^{ijs t}$$

$$= \frac{2}{i\pi} \sum_{j \text{ dispari}} \frac{1}{j^2} (\cos(jt) + i \sin(jt))$$

$$= -\frac{2}{\pi} \sum_{\substack{j \text{ dispari} \\ j > 0}} \frac{1}{j^2} (\cos(jt)) + \frac{1}{(-j)^2} (\cos(-jt)) + \frac{1}{j^2} i \sin(jt) + \frac{1}{(-j)^2} i \sin(-jt)$$

$$= -\frac{4}{\pi} \sum_{\substack{j \text{ dispari} \\ j > 0}} \frac{1}{j^2} \cos(jt)$$

6/11

$$\textcircled{7} f_3(t) = \frac{2}{i\pi} \sum_{j \text{ dispari}} \frac{1}{j} \left(\frac{1}{ij} \right)^2 e^{ijt}$$

$$= \frac{2}{i\pi} \sum_{j \text{ dispari}} -\frac{1}{j^3} (\cos(jt) + i \sin(jt))$$

$$= -\frac{2}{i\pi} \sum_{\substack{j \text{ dispari} \\ j > 0}} \left(\frac{1}{j^3} \cos(jt) + \frac{i}{j^3} \sin(jt) + \frac{1}{(-j)^3} \cos(jt) + \frac{i}{(-j)^3} \sin(-jt) \right)$$

$$= -\frac{4}{\pi} \sum_{\substack{j \text{ dispari} \\ j > 0}} \frac{1}{j^3} \sin(jt)$$

$$\boxed{B} \quad \frac{z}{4} = \frac{s}{4} = \frac{xy}{2x} = \frac{x}{2} \leadsto 2x = z$$

$$\frac{z}{8} = \frac{s}{4} = \frac{xy}{2x} = \frac{y}{2} \leadsto 4y = z = 2x \\ \leadsto 2y = x$$

7/11

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 4y \end{pmatrix}$$

$$z = xy = 2y^2 \leadsto 1 = y^2 \leadsto y = 1$$

(escludo $y = -1$ per nessun
motivo serio; solo per
avere una singola
soluzione)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(s, t, u)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \partial s / \partial x & \partial s / \partial y & \partial s / \partial z \\ \partial t / \partial x & \partial t / \partial y & \partial t / \partial z \\ \partial u / \partial x & \partial u / \partial y & \partial u / \partial z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

8/11

$$\left. \frac{\partial (s, t, u)}{\partial (x, y, z)} \right|_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (s, t, u)} \right|_{\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ -4 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ -16 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

[C] Pen $f = f(p, q, r, s)$

$$f = \dots + \frac{1}{2!1!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial p^2 \partial s} \right|_{p=q=r=s=0} p^2 s + \dots$$

9/11

Pen $f = (p+q+m+s+3)^4$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 4(p+q+m+s+3)^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial s} = 12(p+q+m+s+3)^2$$

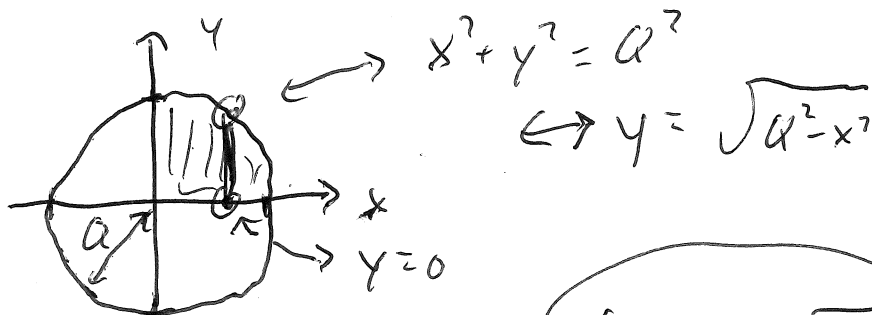
$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2 \partial s} = 24(p+q+m+s+3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2 \partial s} \Big|_{p=q=m=s=0} = 24 \cdot 3 = 72$$

Il coefficiente desiderato è

$$\frac{1}{2!1!} 72 = \boxed{36}$$

[D]



$$0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$$

10/11

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq Q^2 \\ x, y \geq 0}} I \, dA = \int_{x=0}^Q \left(\int_{y=0}^{\sqrt{Q^2-x^2}} I \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^Q \sqrt{Q^2-x^2} \, dx$$

$$= \int_{t=0}^{\pi/2} \sqrt{Q^2-Q^2 \sin^2 t} \cdot Q \cos t \, dt$$

~~max~~

$$\begin{aligned} x &= Q \sin t \\ dx &= Q \cos t \, dt \\ x=0 &\Leftrightarrow t=0 \\ x=Q &\Leftrightarrow t=\pi/2 \end{aligned}$$

$$= \int_{t=0}^{\pi/2} Q \cos t \cdot Q \cos t \, dt = Q^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt$$

$$= \frac{\pi}{4} Q^2 \quad (\text{l'area del quarto del disco: giusto})$$

$$\iint_{\substack{x^2+y^2 \leq Q^2 \\ x, y \geq 0}} xy \, dA = \int_{x=0}^Q \left(\int_{y=0}^{\sqrt{Q^2-x^2}} xy \, dy \right) dx$$

~~11/11~~

11/11

$$= \int_{x=0}^Q x \left[\frac{y^3}{2} \right]_{y=0}^{\sqrt{Q^2-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^Q x (Q^2 - x^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x=0}^Q Q^2 x - x^3 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{x=0}^Q$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{Q^4}{2} - \frac{Q^4}{4} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^4}{4} = \frac{Q^4}{8}$$

$$\overline{xy} = \frac{\iint xy dA}{\iint 1 dA} = \frac{Q^4/8}{\pi Q^2/4} = \frac{Q^2}{2\pi}$$