

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Ingegneria (Steger)

Prova Scritta di 25 febbraio 2025

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con ragionevoli soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \phi \cos \theta & y &= r \sin \phi \sin \theta & z &= r \cos \phi \\dV &= dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta\end{aligned}$$

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

A. Sia $f(t)$ la funzione periodica data da

$$f(t) = 2t - t^2 \quad \text{per } 0 \leq t \leq 2$$

insieme con le due condizioni:

$$f(t+4) = f(t)$$

$$f(-t) = -f(t)$$

1. Calcolare i coefficienti di Fourier di $f(t)$, cioè i coefficienti a_j nelle formule sopra. Occorre dividere l'intervallo d'integrazione in due intervalli: $-2 \leq t \leq 0$ e $0 \leq t \leq 2$. Se si applica la sostituzione $t = -u$ al primo intervallo, si può evitare di fare lo stesso calcolo due volte.
2. Disegnare il grafico di $f(t)$ per $-6 \leq t \leq 6$.
3. Spiegare con i coefficienti di Fourier il fatto che il grafico di $f(t)$ è abbastanza simile al grafico di $\sin(\pi t/2)$.

B. Trovare il massimo e il minimo di $x + y + z$ sotto i vincoli:

$$x, y, z \geq 0$$

$$15x^2 + 10y^3 + 6z^5 = 31$$

C. Siano

$$v = r \cos A$$

$$x = r \sin A \cos B$$

$$y = r \sin A \sin B \cos C$$

$$z = r \sin A \sin B \sin C$$

Calcolare la matrice $\partial(v, x, y, z)/\partial(r, A, B, C)$ e il determinante di quella matrice.

D. Sia $Q > 0$ un parametro fisso. Sia $\mathcal{F}$ la forma tridimensionale determinata dai vincoli:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq Q^2$$

$$x \geq |y|$$

Prima fare uno schizzo della forma $\mathcal{F}$. Poi usare le coordinate *sferiche* e calcolare la media di x su $\mathcal{F}$.

1/21

A ①

$$\downarrow \int e^{kt} dt = \frac{1}{k} e^{kt}$$

$$\begin{aligned} \int t e^{kt} dt &= t \cdot \frac{1}{k} e^{kt} - \int 1 \cdot \frac{1}{k} e^{kt} dt \\ &= \frac{1}{k} t e^{kt} - \frac{1}{k^2} e^{kt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int t^2 e^{kt} &= t^2 \cdot \frac{1}{k} e^{kt} - \int 2t \cdot \frac{1}{k} e^{kt} dt \\ &= \frac{1}{k} t^2 e^{kt} - \frac{2}{k} \left(\frac{1}{k} t e^{kt} - \frac{1}{k^2} e^{kt} \right) \\ &= \frac{1}{k} t^2 e^{kt} - \frac{2}{k^2} t e^{kt} + \frac{2}{k^3} e^{kt} \end{aligned}$$

$$\boxed{2/2!}$$

$$\int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i s t/4} dt$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} (2t - t^2) e^{-\pi i s t/2}$$

$$\boxed{k = -\pi i s/2}$$

$$= \left[2 \left(\frac{1}{(-\pi i s/2)} t e^{-\pi i s t/2} \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(-\pi i s/2)^2} e^{-\pi i s t/2} \right)$$

$$- \left(\frac{1}{(-\pi i s/2)} t^2 e^{-\pi i s t/2} \right.$$

$$\left. - \frac{2}{(-\pi i s/2)^2} t e^{-\pi i s t/2} \right.$$

$$\left. + \frac{2}{(-\pi i s/2)^3} e^{-\pi i s t/2} \right]_{t=0}^{\infty}$$

$$\frac{3}{2i}$$

$$= 2 \frac{1}{(-\pi i \delta / 2)} \cdot 2 \cdot e^{-\pi i \delta}$$

$$- 2 \frac{1}{(-\pi i \delta / 2)^2} e^{-\pi i \delta} + 2 \frac{1}{(-\pi i \delta / 2)^2}$$

$$- \frac{1}{(-\pi i \delta / 2)} \cdot 2^2 \cdot e^{-\pi i \delta}$$

$$+ \frac{2}{(-\pi i \delta / 2)^2} \cdot 2 e^{-\pi i \delta}$$

$$- \frac{2}{(-\pi i \delta / 2)^3} e^{-\pi i \delta}$$

$$+ \frac{2}{(-\pi i \delta / 2)^3}$$

$$\int e^{-\pi i \delta} = (e^{-\pi i})^{\delta} = (-1)^{\delta} \int$$

$$(4/21)$$

$$= (-1)^j \left(2 \cdot \frac{1}{(-\pi i j/2)} \cdot 2 - \frac{1}{(-\pi i j/2)} \cdot 2^2 \right.$$

$$- 2 \frac{1}{(-\pi i j/2)^2} + \frac{2}{(-\pi i j/2)^2} \cdot 2$$

$$\left. - \frac{2}{(-\pi i j/2)^3} \right)$$

$$+ 2 \frac{1}{(-\pi i j/2)^2} + \frac{2}{(-\pi i j/2)^3}$$

$$= (-1)^j \left(2 \cdot \frac{1}{(-\pi i j/2)^2} - \frac{2}{(-\pi i j/2)^3} \right)$$

$$+ \frac{2}{(-\pi i j/2)^2} + \frac{2}{(-\pi i j/2)^3}$$

$$\int_{t=-2}^0 f(t) e^{-2\pi i j t/4} dt$$

$$\begin{aligned} t &= -u \\ dt &= -du \end{aligned}$$

5/21

$$= \int_{u=2}^0 f(-u) e^{\pi i j u / 2} (-du)$$

$$= - \int_{u=0}^2 - f(u) e^{\pi i j u / 2} (-du)$$

$$= - \int_{u=0}^2 f(u) e^{\pi i j u / 2} du,$$

identico all'integrale $\int_{t=0}^2$,

a meno del segno davanti e
il segno in j quindi

$$= - \left((-1)^{-j} \left(2 \frac{1}{(\pi i j / 2)^2} - \frac{2}{(\pi i j / 2)^3} \right) + \frac{1}{(\pi i j / 2)^2} + \frac{2}{(\pi i j / 2)^3} \right)$$

$$(6/21)$$

$$= (-1)^j \left(-2 \frac{1}{(\pi i j/2)^2} + 2 \frac{1}{(\pi i j/2)^3} \right)$$

$$- \frac{2}{(\pi i j/2)^2} - \frac{2}{(\pi i j/2)^3}$$

$$a_j = \frac{1}{4} \int_{t=-2}^2 f(t) e^{-2\pi i j t/4} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int_{t=-2}^0 f(t) e^{-2\pi i j t/4} dt + \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) e^{-2\pi i j t/4} dt$$

$$= \frac{1}{4} \left((-1)^j \left(-2 \frac{1}{(\pi i j/2)^2} + 2 \frac{1}{(-\pi i j/2)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{1}{(\pi i j/2)^3} - 2 \frac{1}{(-\pi i j/2)^3} \right) \right. \\ \left. - \frac{2}{(\pi i j/2)^2} + \frac{2}{(-\pi i j/2)^2} \right. \\ \left. - \frac{2}{(\pi i j/2)^3} + \frac{2}{(-\pi i j/2)^3} \right)$$

(7/21)

$$= \frac{1}{4} (-1)^j \left(0 + \frac{4}{(\pi i j / 2)^3} \right)$$

$$+ \frac{1}{4} \left(0 + \frac{4}{(\pi i j / 2)^3} \right)$$

$$= \frac{1}{(\pi i j / 2)^3} ((-1)^j - 1)$$

$$= \frac{8}{\pi^3} \frac{i}{j^3} ((-1)^j - 1)$$

$$= \frac{8}{\pi^3} \frac{1}{j^3} i \begin{cases} 0 & \text{se } j \text{ è pari} \\ -2 & \text{se } j \text{ è dispari} \end{cases}$$

② grafico su $0 \leq t \leq 2$:

$$f(t) = 2t - t^2 = 0 \quad \text{se } t = 0$$

$$= 1 \quad \text{se } t = 1$$

$$= 0 \quad \text{se } t = 2$$

$$\frac{df}{dt} = 2 - 2t = 2 \quad \text{se } t = 0$$

$$0 \quad \text{se } t = 1$$

$$-2 \quad \text{se } t = 2$$

8/21

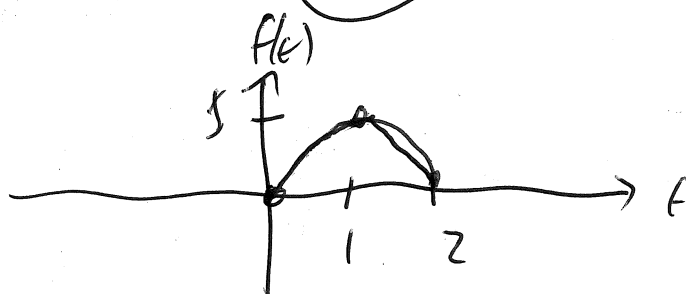


grafico in $-2 \leq t \leq 2$ con l'uso
di $f(-t) = -f(t)$ (non la formula!)

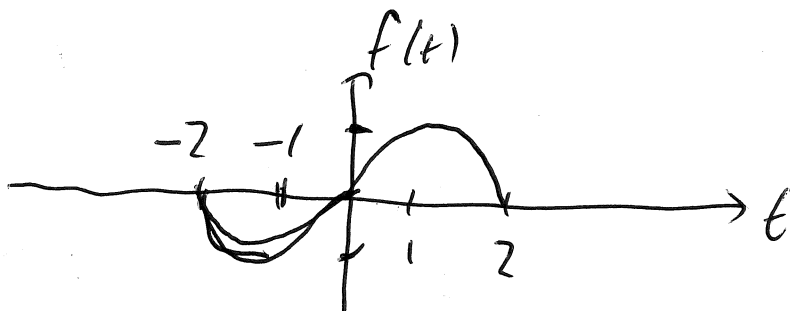
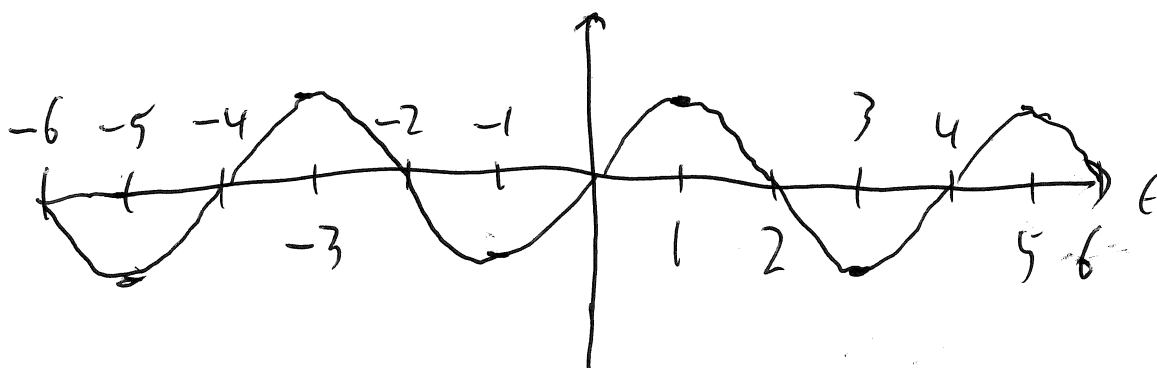


grafico in $-6 \leq t \leq 6$ con
l'uso della periodicità,
 $f(t+4) = f(t)$



9/21

③ Nella serie di Fourier i coefficienti più grandi sono per $j = \pm 1$. I termini corrispondenti sono

$$a_{-1} e^{2\pi i (-1)t/4} + a_1 e^{2\pi i (1)t/4}$$

$$= \frac{8}{\pi^3} \left(\frac{1}{(-1)^3} \right) i(-2) e^{-\pi i t/2}$$

$$+ \frac{8}{\pi^3} \left(\frac{1}{1^3} \right) i(-2) e^{\pi i t/2}$$

$$= \frac{8}{\pi^3} (-2i) \left(-e^{\pi i t/2} + e^{-\pi i t/2} \right)$$

$$= \frac{8}{\pi^3} (-2i)(2i) \left(\frac{e^{\pi i t/2} - e^{-\pi i t/2}}{2i} \right)$$

$$= \frac{32}{\pi^3} \sin(\pi t/2)$$

10/21

I coefficienti successivi non nulli sono per $j = \pm 3$, con un extra fattore di $\frac{1}{27}$.

Quindi è ragionevole scrivere

$$f(t) \approx \frac{32}{\pi^3} \cos(\pi t/2)$$

$$= (1.032 \dots) \cos(\pi t/2),$$

che si vede anche dal grafico.

[B] $f(x) = x + y + z$ $g(x) = 15x^2 + 10y^3 + 6z^5$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 30x \\ 30y^2 \\ 30z^4 \end{pmatrix}$$

(11/21)

$$\nabla f = \lambda \nabla g \leadsto$$

$$1 = \lambda - 30x$$

$$1 = \lambda - 30y^2$$

$$1 = \lambda - 30z^4$$

$$\rightarrow x = y^2 = z^4 = \frac{1}{30\lambda}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^4 \\ z^2 \\ z \end{pmatrix}$$

Ci vuole anche

$$31 = 15x^2 + 10y^3 + 6z^5$$

$$= 15z^8 + 10z^6 + 6z^5$$

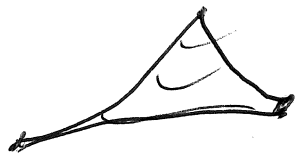
un'equazione che normalmente si risolve numericamente, ma in questo caso si vede che la soluzione è $z=1$.

17/21

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e } f(x, y, z) = x + y + z = 3$$

Occorre anche tener conto dei punti sulla frontiera della superficie determinata dai vincoli. Con i vincoli x, y, z tale superficie è curva e triangoloide:



I tre vertici si trovano sulle tre assi.

$$13/21$$

when $x, y = z = 0$, $15x^2 = 31$

$$x = (31/15)^{1/2} = 1,43759\dots$$

$$x + y + z = 1,43759\dots$$

when $y, x = z = 0$, $10y^3 = 31$

$$y = (31/10)^{1/3} = 1,458099\dots$$

$$x + y + z = 1,458099\dots$$

when $z, x = y = 0$, $6z^5 = 31$

$$z = (31/6)^{1/5} = 1,388076\dots$$

$$x + y + z = 1,388076\dots$$

Si dovrebbe ^{considerare} anche possibili
punti di massimo/minimo
nei lati del triangolo.

14/21

Salto quelli calcoli poiché
(a) richiedono un po' di
calcoli numerici ~~da~~ per
identificare i punti rilevanti
e (b) sembra quasi garantito
che i rilevanti valori di
 $f(x, y, z) = x + y + z$ sono intermedi
fra quello all'interno del
triangolo, 3, e quelli
sui vertici, tutti < 3 .

Esito: massimo = 3

per $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

minimo = 1,388076...

per $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (31/6)^{1/3} \end{pmatrix}$

15/21

$$\boxed{C} \quad \frac{\partial (m \cos A, m \sin A \cos B, m \sin A \sin B \cos C, m \sin A \sin B \sin C)}{\partial (m, A, B, C)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos A & -m \sin A \\ \sin A \cos B & m \cos A \cos B \\ \sin A \sin B \cos C & m \cos A \sin B \cos C \\ \sin A \sin B \sin C & m \cos A \sin B \sin C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -m \sin A \sin B & \cancel{m \sin A \sin B} \\ m \sin A \cos B \cos C & -m \sin A \sin B \sin C \\ m \sin A \cos B \sin C & m \sin A \sin B \cos C \end{pmatrix}$$

Per calcolo

$$\det \left(\frac{\partial (V, X, Y, Z)}{\partial (m, A, B, C)} \right)$$

prima evidenziamo fattori

comuni alle colonne 2, 3, e 4.

16/21

$$\det \left(\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, A, B, C)} \right) = r \cdot (r \sin A) \cdot (r \sin A \sin B)$$

$$\det \begin{pmatrix} \cos A & -\sin A & 0 & 0 \\ \sin A \cos B & \cos A \cos B & 0 & 0 \\ \sin A \sin B \cos C & \cos A \sin B \cos C & -\sin B & 0 \\ \sin A \sin B \sin C & \cos A \sin B \sin C & \cos B \cos C & -\sin C \\ & & \cos B \sin C & \cos C \end{pmatrix}$$

Poi si espande rispetto alla prima riga:

$$= r^3 \sin^2 A \sin B$$

$$= \cos A \cdot \det \begin{pmatrix} \cos A \cos B & -\sin B & 0 \\ \cos A \sin B \cos C & \cos B \cos C & -\sin C \\ \cos A \sin B \sin C & \cos B \sin C & \cos C \end{pmatrix}$$

$$= (-\sin A) \cdot \det \begin{pmatrix} \sin A \cos B & -\sin B & 0 \\ \sin A \sin B \cos C & \cos B \cos C & -\sin C \\ \sin A \sin B \sin C & \cos B \sin C & \cos C \end{pmatrix}$$

17/21

$$= M^3 \sin^2 A \sin B$$

$$= \left(\cos^2 A \det \begin{pmatrix} \cos B & -\sin B & 0 \\ \sin B \cos C & \cos B \cos C & -\sin C \\ \sin B \sin C & \cos B \sin C & \cos C \end{pmatrix} + \sin^2 A \det \begin{pmatrix} \cos B & -\sin B & 0 \\ \sin B \cos C & \cos B \cos C & -\sin C \\ \sin B \sin C & \cos B \sin C & \cos C \end{pmatrix} \right)$$

Si usa il fatto che $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$:

$$= M^3 \sin^2 A \sin B$$

$$= \det \begin{pmatrix} \cos B & -\sin B & 0 \\ \sin B \cos C & \cos B \cos C & -\sin C \\ \sin B \sin C & \cos B \sin C & \cos C \end{pmatrix}$$

Si espande rispetto alla prima riga:

$$= M^3 \sin^2 A \sin B$$

$$= \left(\cos B \cdot \det \begin{pmatrix} \cos B \cos C & -\sin C \\ \cos B \sin C & \cos C \end{pmatrix} - (-\sin B) \cdot \det \begin{pmatrix} \sin B \cos C & -\sin C \\ \sin B \sin C & \cos C \end{pmatrix} \right)$$

18/21

$$= m^3 \sin^2 A \sin B$$

$$= \left(\cos^2 B \cdot \det \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C \\ \sin C & \cos C \end{pmatrix} + \sin^2 B \cdot \det \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C \\ \sin C & \cos C \end{pmatrix} \right)$$

Si usa il fatto che $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$

$$= m^3 \sin^2 A \sin B \cdot \det \begin{pmatrix} \cos C & -\sin C \\ \sin C & \cos C \end{pmatrix}$$

$$= m^3 \sin^2 A \sin B \cdot (\cos^2 C - (-\sin^2 C))$$

$$= m^3 \sin^2 A \sin B \cdot (\cos^2 C + \sin^2 C)$$

$$= m^3 \sin^2 A \sin B$$

[D]

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq Q^2 \rightarrow m^2 \leq Q^2$$

$$m \geq 0 \text{ (compres)} \leadsto 0 \leq m \leq Q$$

19/21

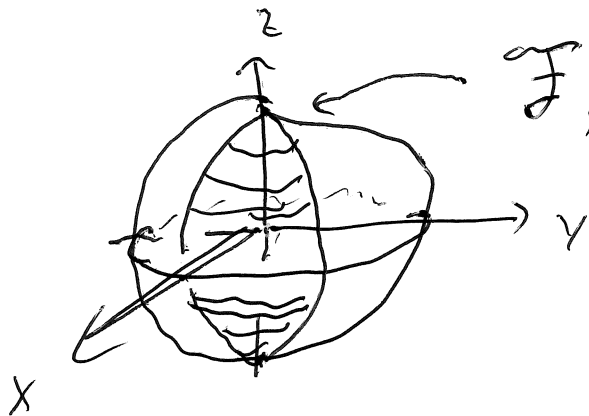
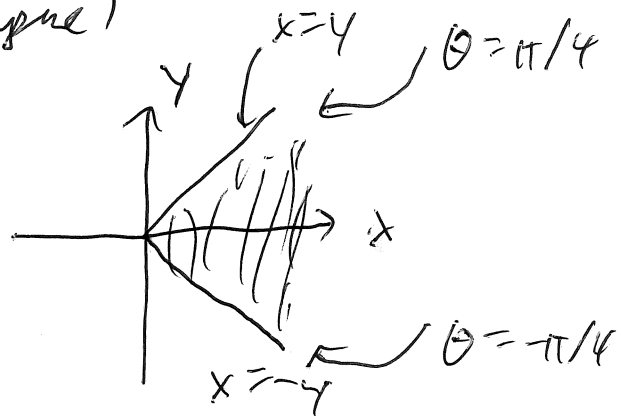
$$0 \leq \varphi \leq \pi \quad (\text{semipiano})$$

$$x \geq |y|$$

$$\hookrightarrow x \geq y \text{ e } y \geq 0$$

$$x \geq -y \text{ e } y \leq 0$$

$$\hookrightarrow -\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$$



una fetta
della sfera,
la quarta
parte della
sfera

$$\iiint_F I \, dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\rho} I \cdot \rho^2 \cdot \sin \varphi \, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \, d\varphi \right) d\theta$$

20/21

$$= \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \frac{Q^3}{3} \cdot 2 \, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{Q^3}{3} \cdot 2$$

$$= \frac{\pi Q^3}{3} \quad \left(= \frac{1}{4} \cdot \frac{4\pi Q^3}{3}, \text{ giusto} \right)$$

$$\iiint_{\mathcal{F}} x \, dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^Q r \cos \varphi \cos \theta \right. \right.$$

$$\left. \cdot r^2 \cos \varphi \, dr \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi \frac{Q^4}{4} d\varphi \right) d\theta$$

$$\left[\int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = -\frac{1}{2} \cos \varphi \sin \varphi \right]_{\varphi=0}^{\pi}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\pi} 1 \, d\varphi = \frac{1}{2} \pi$$

$$\boxed{21/21}$$

$$= \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{Q^4}{4} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2} \pi \cdot \frac{Q^4}{4} \cdot \sin \theta \right]_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{Q^4}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \pi \cdot \frac{Q^4}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{\pi \sqrt{2}}{8} \cdot Q^4$$

$$\overline{x} = \frac{\iiint_{\mathcal{F}} x \, dV}{\iiint_{\mathcal{F}} 1 \, dV} = \frac{\pi \sqrt{2}/8 \cdot Q^4}{\pi Q^3/3}$$

$$= \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot Q}$$