

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Ingegneria (Steger)

Prova Scritta di 11 febbraio 2025

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggregati capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con ragionevoli soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \phi \cos \theta \quad y = r \sin \phi \sin \theta \quad z = r \cos \phi$$
$$dV = dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$$

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

A. Si consideri una funzione periodica $f(t)$ che soddisfa le tre condizioni:

$$f(t+4) = f(t) \qquad f(-t) = -f(t) \qquad f(2-t) = f(t)$$

1. Disegnare il grafico di $f(t)$ nel caso particolare che

$$f(t) = 2t - t^2 \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1$$

(Non è richiesto il calcolo della serie di Fourier in questo caso particolare; forse quel calcolo si troverà su un appello futuro.)

2. Disegnare il grafico di $f(t)$ per un qualsiasi altro $f(t)$ che soddisfa le tre condizioni. Non è necessario indicare la formula.
3. Sia $\sum_j a_j e^{\pi i j t/2}$ la somma di Fourier per $f(t)$. Trovare la condizione sugli a_j che corrisponde alla condizione $f(-t) = -f(t)$.
4. Altrettanto, trovare la condizione sugli a_j che corrisponde alla condizione $f(2-t) = f(t)$.
5. Tenendo conto delle condizioni, scrivere la somma di Fourier in una forma che usa seni al posto degli esponenziali complessi.

B. Trovare un vettore tangente sia alla sfera data da $x^2 + y^2 + z^2 = 21$ sia alla sfera data da $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$ al loro punto comune $(x, y, z) = (1, 2, 4)$.

C. Siano

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 xy + \dots \qquad g(x) = 1 + b_1 y + b_2 xy + \dots$$

le serie di Taylor di f e g attorno a $(x, y) = (0, 0)$ (fino ai termini di secondo grado). Trovare la serie di Taylor di $h = (f^3 + g^3)^2$ fino ai termini di secondo grado. Poi trovare le derivate parziali di h fino al secondo ordine valutate a $(x, y) = (0, 0)$.

D. Siano R e A due parametri fissi con $0 < A < R$. Sia $\mathcal{G}$ la forma definita da:

$$z \geq 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \qquad x^2 + y^2 \leq \left(\frac{R^2}{A^2} - 1 \right) z^2$$

Prima fare uno schizzo della forma $\mathcal{G}$, con attenzione particolare alla circonferenza dove $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $x^2 + y^2 = \left(\frac{R^2}{A^2} - 1 \right) z^2$. Poi usare le coordinate *sferiche* e calcolare il volume di $\mathcal{G}$.

A. Si consideri una funzione periodica $f(t)$ che soddisfa le tre condizioni:

$$f(t+4) = f(t) \qquad f(-t) = -f(t) \qquad f(2-t) = f(t)$$

1. Disegnare il grafico di $f(t)$ nel caso particolare che

$$f(t) = 2t - t^2 \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1$$

(Non è richiesto il calcolo della serie di Fourier in questo caso particolare; forse quel calcolo si troverà su un appello futuro.)

2. Disegnare il grafico di $f(t)$ per un qualsiasi altro $f(t)$ che soddisfa le tre condizioni. Non è necessario indicare la formula.
3. Sia $\sum_j a_j e^{\pi i j t/2}$ la somma di Fourier per $f(t)$. Trovare la condizione sugli a_j che corrisponde alla condizione $f(-t) = -f(t)$.
4. Altrettanto, trovare la condizione sugli a_j che corrisponde alla condizione $f(2-t) = f(t)$.
5. Tenendo conto delle condizioni, scrivere la somma di Fourier in una forma che usa seni al posto degli esponenziali complessi.

B. Trovare un vettore tangente sia alla sfera data da $x^2 + y^2 + z^2 = 21$ sia alla sfera data da $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$ al loro punto comune $(x, y, z) = (1, 2, 4)$.

C. Siano

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 xy + \dots \qquad g(x) = 1 + b_1 y + b_2 xy + \dots$$

le serie di Taylor di f e g attorno a $(x, y) = (0, 0)$ (fino ai termini di secondo grado). Trovare la serie di Taylor di $h = (f^3 + g^3)^2$ fino ai termini di secondo grado. Poi trovare le derivate parziali di h fino al secondo ordine valutate a $(x, y) = (0, 0)$.

D. Siano R e A due parametri fissi con $0 < A < R$. Sia $\mathcal{G}$ la forma definita da:

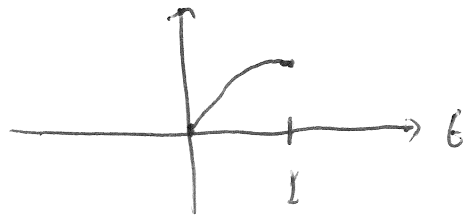
$$z \geq 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \qquad x^2 + y^2 \leq \left(\frac{R^2}{A^2} - 1 \right) z^2$$

Prima fare uno schizzo della forma $\mathcal{G}$, con attenzione particolare alla circonferenza dove $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $x^2 + y^2 = \left(\frac{R^2}{A^2} - 1 \right) z^2$. Poi usare le coordinate *sferiche* e calcolare il volume di $\mathcal{G}$.

1/14

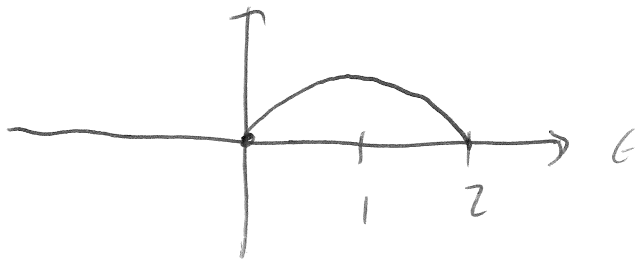
A

① Il grafico di $f(t)$ per $0 \leq t \leq 1$



$$f(t) = 2t - t^2$$

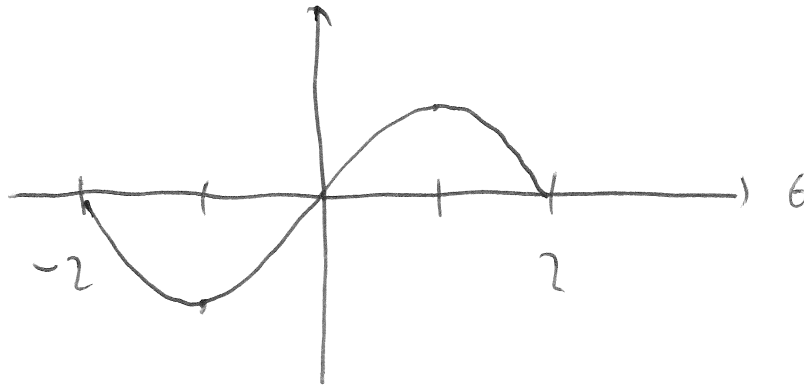
La condizione $f(2-t) = f(t)$ vuol dire che sull'intervallo $0 \leq t \leq 2$, il grafico non cambia se si riflette destra con sinistra.



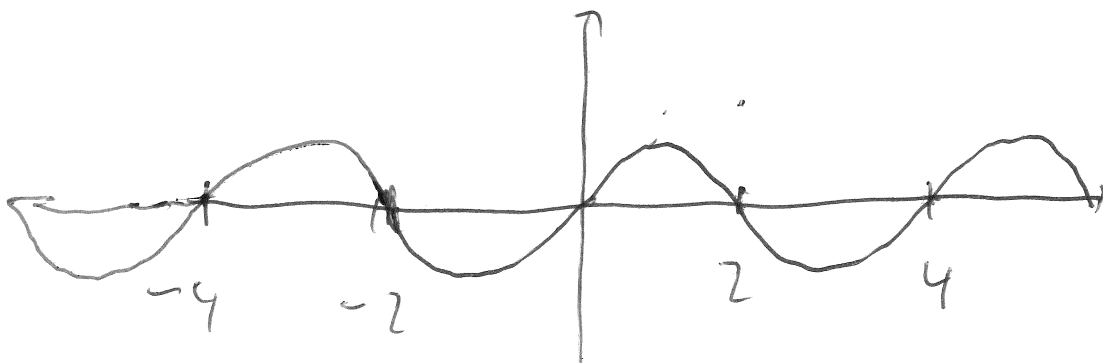
La condizione $f(-t) = -f(t)$ vuol dire che ~~se~~ si riflette destra con sinistra attorno a $t=0$, si

2/14

deve riflettere anche su con giro
attorno a $f(t)=0$



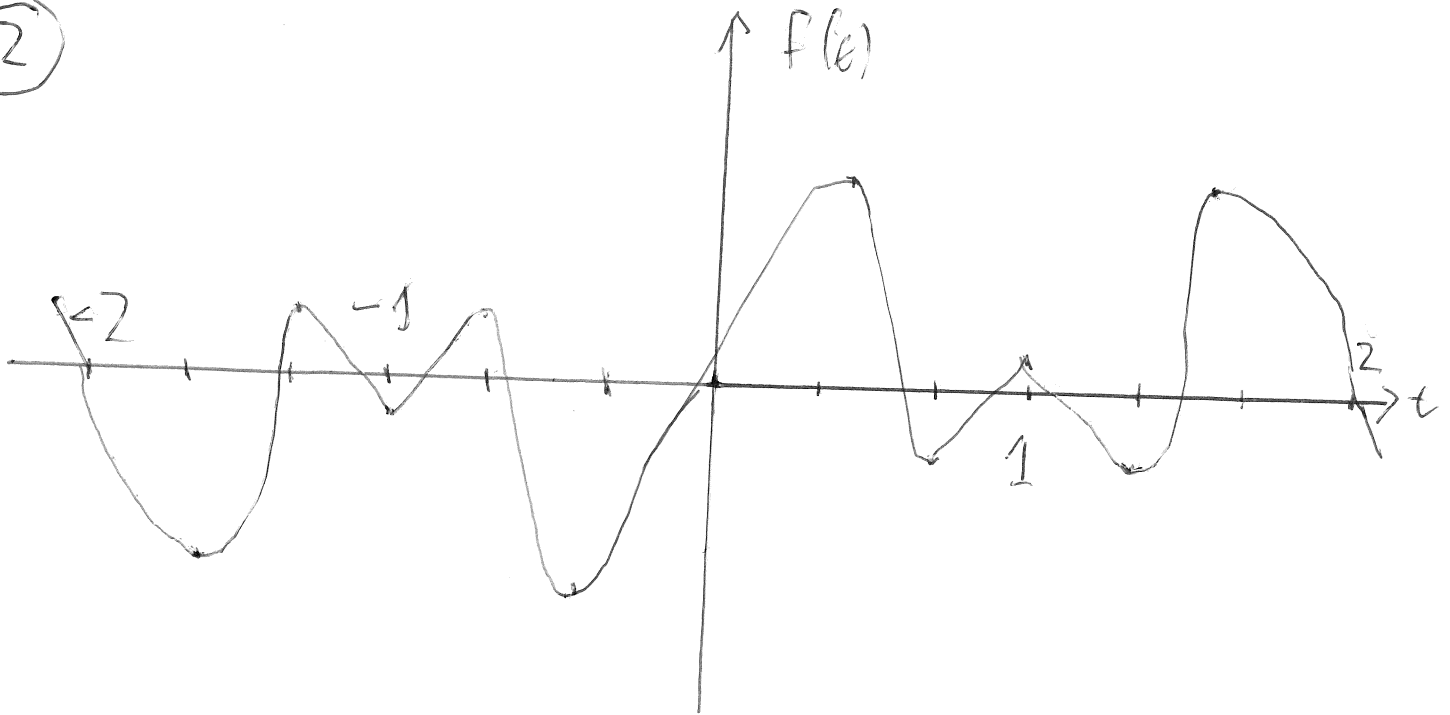
La condizione di periodicità,
 $f(t+4) = f(t)$ vuol dire che
se si sposta il grafico 4
unità a destra, rimane lo
stesso



3/14

Questo grafico è simile (ma non identico) a quello di $\cos(\pi t/2)$

②



③

$$f(-t) = \sum_j a_j e^{-\pi i s_j t/2}$$

$$= \sum_j a_{-j} e^{\pi i s_j t/2}$$

$$-f(t) = \sum_j (-a_j) e^{\pi i s_j t/2}$$

$$f(t) = -f(t) \iff a_{-j} = -a_j$$

4/14

$$(4) \quad f(2-t) = \sum_j a_j e^{\pi i s(2-t)/2}$$

$$= \sum_j a_j e^{\pi i s} e^{-\pi i s t/2}$$

$$= \sum_j a_{-j} e^{-\pi i s} e^{+\pi i s t/2}$$

$$= \sum_j (a_{-j}) (-1)^s e^{\pi i s t/2}$$

$$f(t) = f(2-t) \Leftrightarrow a_j = (-1)^s a_{-j}$$

(5) Se valgono entrambe le condizioni $f(-t) = -f(t)$ e

$f(2-t) = f(t)$, allora

$$a_{-j} = (-1)^s a_{-j} = -(-1)^s a_j$$

5/14

cioè

$$a_j = \begin{cases} a_j & \text{se } j \text{ è dispari} \\ -a_j & \text{se } j \text{ è pari} \end{cases}$$

ma $a_j = -a_j \leadsto 2a_j = 0 \leadsto a_j = 0.$

Dunque $a_j = 0$ per j pari

$$\sum_j a_j e^{\pi i j t / 2}$$

$$= a_1 e^{\pi i t / 2} + a_{-1} e^{-\pi i t / 2}$$

$$+ a_3 e^{3\pi i t / 2} + a_{-3} e^{-3\pi i t / 2}$$

+ ...

$$= a_1 (e^{\pi i t / 2} - e^{-\pi i t / 2})$$

$$+ a_3 (e^{3\pi i t / 2} - e^{-3\pi i t / 2})$$

+ ...

6/14

$$\approx (2i a_1) \sin(\pi t/2)$$

$$+ (2i a_3) \sin(3\pi t/2)$$

$$+ (2i a_5) \sin(5\pi t/2)$$

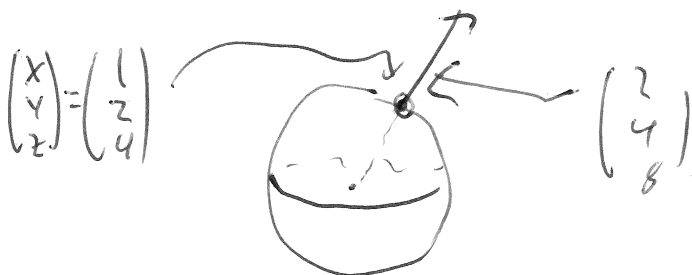
+ ...

poiché $\sin(A) = (e^{iA} - e^{-iA})/2i$,

$$e^{iA} - e^{-iA} = 2i \sin(A)$$

[B] Al punto $(x, y, z) = (1, 2, 4)$ il
perpendicolare alla prima sfera

$$\nabla(x^2 + y^2 + z^2) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$



7/14

Una freccia è tangente alla prima sfera a quel punto se è perpendicolare a $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Per la seconda sfera, ma sempre al punto $(x, y, z) = (1, 2, 4)$, il calcolo analogo dà

$$\nabla((x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2(z-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Una freccia tangente ad ambedue le sfere al punto $(x, y, z) = (1, 2, 4)$ deve essere perpendicolare a $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ e a $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$8/14$$

Esito: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$

Si può anche dividere per 4;

esito alternativo = $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9/14

[C] Scontando sempre termini
di grado > 2 , cioè $x^3, x^2y, xy^2, y^3,$
 $x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, \dots$

$$\begin{aligned} f^2 &= (1 + a_1x + a_2xy + \dots)(1 + a_1x + a_2xy + \dots) \\ &= 1 + 2a_1x + a_1^2x^2 + 2a_2xy + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^3 &= (1 + 2a_1x + a_1^2x^2 + 2a_2xy + \dots) \\ &\quad (1 + a_1x + a_2xy + \dots) \end{aligned}$$

$$= 1 + 3a_1x + 3a_1^2x^2 + 3a_2xy + \dots$$

Altre volte

$$g^3 = 1 + 3b_1y + 3b_1^2y^2 + 3b_2xy + \dots$$

10/14

$$f^3 + g^3$$

$$= 2 + 3a_1x + 3b_1y$$

$$+ 3a_1^2x^2 + (3a_2 + 3b_1)xy + 3b_1^2y^2$$

+ ...

$$(f^3 + g^3)^2 = (2 + 3a_1x + 3b_1y$$

$$+ 3a_1^2x^2 + (3a_2 + 3b_1)xy + 3b_1^2y^2$$

+ ...)^2

$$= 4 + 12a_1x + 12b_1y$$

$$+ 12a_1^2x^2 + (18a_1b_1 + 12a_2 + 12b_2)xy$$

$$+ 12b_1^2y^2 + \dots$$

11/14

Da quella formula si
trova

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial ((f^3 + g^3)^7)}{\partial x} = 12 a_1$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 12 b_1$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 24 a_1^2$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 24 b_1^2$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 18 a_1 b_1 + 12 a_2 + 12 b_2$$

12/14

(D) $z \geq 0$

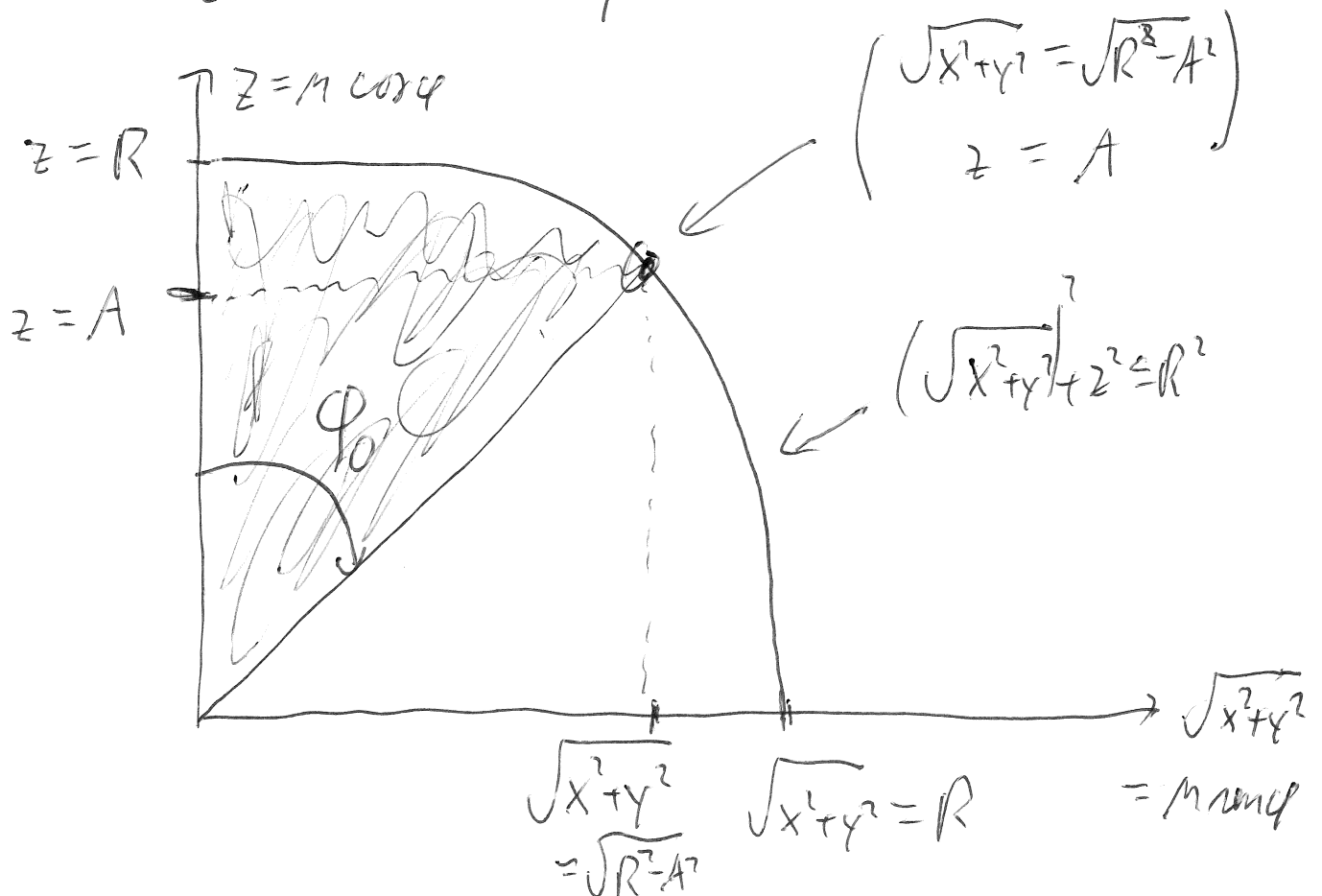
$$x^2 + y^2 \leq \left(\frac{R^2}{A^2} - 1 \right) z^2 = \left(\frac{R^2 - A^2}{A^2} \right) z^2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{\frac{R^2 - A^2}{A^2}} z = \frac{\sqrt{R^2 - A^2}}{A} z$$

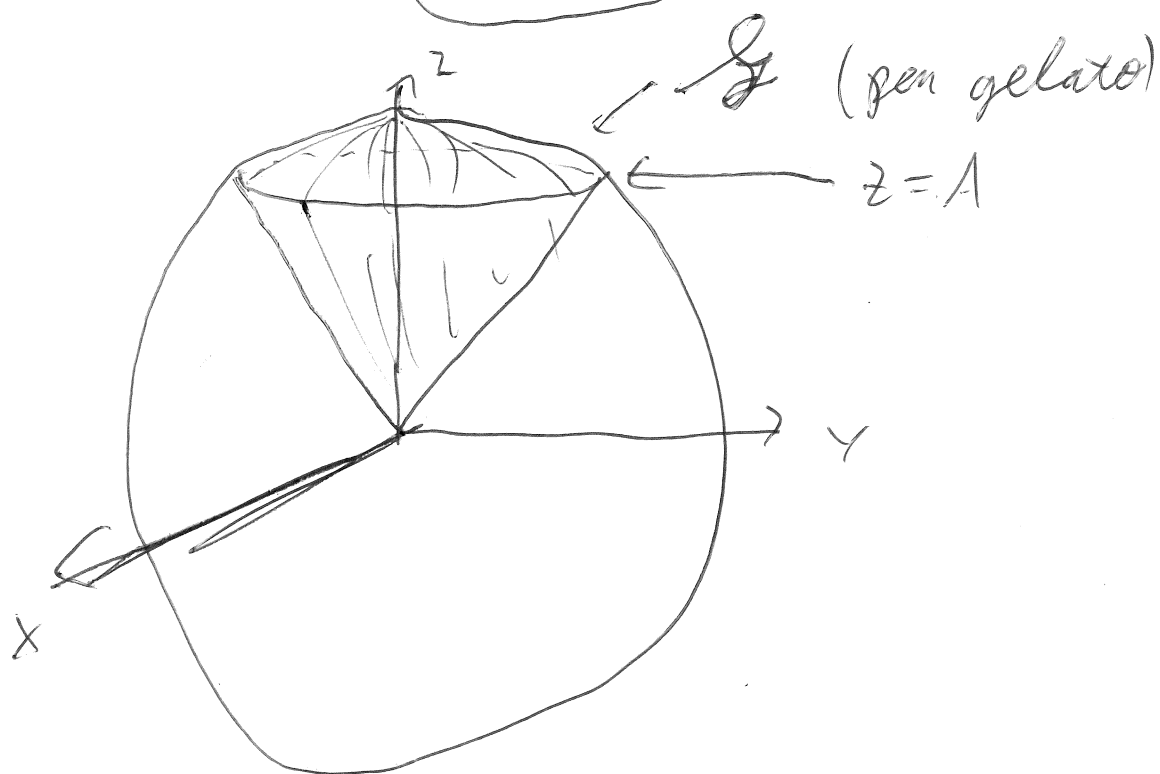
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \leq R^2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = m \sin \varphi$$

$$z = m \cos \varphi$$



13 / 14



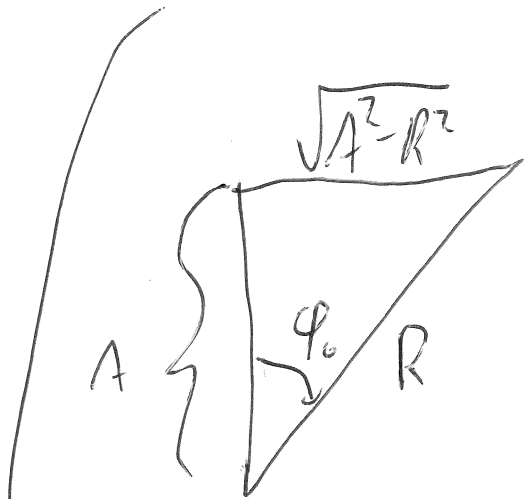
$$\text{vol}(G) = \iiint_G 1 \, dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi_0} \left(\int_{r=0}^R r^2 \sin \varphi \, dr \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$= 2\pi \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi_0} \sin \varphi \cdot \frac{R^3}{3} d\varphi \right)$$

14/14

$$= \frac{2\pi R^3}{3} [-\cos \varphi]_{\varphi=0}^{\varphi_0} = \frac{2\pi R^3}{3} (1 - \cos \varphi_0)$$



$$\cos \varphi_0 = \frac{AO}{R} = \frac{A}{R}$$

$$\rightarrow = \frac{2\pi R^3}{3} \left(1 - \frac{A}{R} \right) = \frac{2\pi}{3} (R^3 - AR^2)$$