

Analisi 2, Ingegneria (Steger)

Prova Scritta di 24 settembre 2024

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \phi \cos \theta & y &= r \sin \phi \sin \theta & z &= r \cos \phi \\dV &= dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta\end{aligned}$$

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

A.

1. Usare la formula per le somme geometriche e verificare l'identità:

$$\begin{aligned} & \sum_{-n \leq j \leq n} e^{ijt} \\ &= e^{-int} + e^{-i(n-1)t} + e^{-i(n-2)t} + \dots + 1 + \dots + e^{i(n-2)t} + e^{i(n-1)t} + e^{int} \\ &= \frac{\text{sen}((n+1/2)t)}{\text{sen}(t/2)} \end{aligned}$$

(Esempio illustrativo: se $n = 3$, la somma diventa $e^{-3it} + e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it} + e^{3it}$.)

2. Valutare ambedue le parti di questa identità per $t = 0$.
3. Calcolare il quadrato dell'identità per $n = 2$, e così trovare la serie (la somma) di Fourier di $\left(\frac{\text{sen}(5t/2)}{\text{sen}(t/2)}\right)^2$.
4. Idem, ma per n generale: calcolare la serie di Fourier di $\left(\frac{\text{sen}((n+1/2)t)}{\text{sen}(t/2)}\right)^2$.

B. Siano $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$ e $y = y(r, \theta) = r \sin \theta$ (le solite formule per le coordinate polari).

1. Calcolare (ancora una volta) $\partial(x, y)/\partial(r, \theta)$.
2. Usando il calcolo precedente, calcolare $\partial(r, \theta)/\partial(x, y)$, esprimendo l'esito in termini di r e θ .
3. Per $f = f(r, \theta)$, calcolare le derivate $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$, esprimendo gli esiti in termini di r , $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\partial f/\partial r$, e $\partial f/\partial \theta$.
4. Calcolare $\frac{1}{2}(\partial f/\partial x - i\partial f/\partial y)$ in termini di r , $e^{i\theta}$, $\partial f/\partial r$, e $\partial f/\partial \theta$.

C. Siano A , B , e C costanti positivi. Calcolare il massimo e il minimo di $Ax + By + Cz$ sotto i vincoli $x, y, z \geq 0$ e $xyz = 1$. Quale sarebbe la generalizzazione a più di 3 variabili?

D. Sia $\mathcal{O}$ l'ottava parte della sfera determinata dalle disuguaglianze

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad x, y, z \geq 0$$

Usare le coordinate sferiche, calcolare $\iiint_{\mathcal{O}} z^4 dV$ e $\iiint_{\mathcal{O}} x^4 dV$, e verificare che siano uguali.

1/14

[A] ① Si applica la formula

$$1 + r + r^2 + \dots + r^N = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}$$

con $N = 2n$ e $r = e^{it}$

$$e^{-int} + e^{-i(n-1)t} + \dots + e^{i(n-1)t} + e^{int}$$

$$= e^{-int} (1 + e^{it} + e^{2it} + \dots + e^{2int})$$

$$= e^{-int} \left(\frac{1 - (e^{it})^{2n+1}}{1 - e^{it}} \right) = \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}$$

$$= \frac{e^{i(n+1)t} - e^{-int}}{e^{it} - 1} \cdot \frac{e^{-it/2}}{e^{-it/2}}$$

$$= \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{2i \sin((n+1/2)t)}{2i \sin(t/2)}$$

$$= \frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{\cos(\frac{1}{2}t)}$$

② La somma

$$e^{-int} + e^{-i(n-1)t} + \dots + e^{i(n-1)t} + e^{int}$$

ha $2n+1$ termini. Per $t=0$ ciascun termine vale 1 e la somma vale $(2n+1)$.

Per valutare
$$\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{\cos(\frac{1}{2}t)}$$

quando $t=0$ conviene usare il limite;

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{\cos(\frac{1}{2}t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(n+\frac{1}{2}) \sin((n+\frac{1}{2})t)}{\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}t)}$$

$$= \frac{n + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2n+1}{1}.$$

$$3 \left(\frac{\cos\left(\frac{y}{2}t\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}t\right)} \right)^2$$

$$= (e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it})$$

$$\cdot (e^{-2it} + e^{it} + 1 + e^{it} + e^{2it})$$

$$= e^{-4it} + e^{-3it} + e^{-2it} + e^{-it} + 1$$

$$+ e^{-3it} + e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it}$$

$$+ e^{-2it} + e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it}$$

$$+ e^{-it} + 1 + e^{it} + e^{2it} + e^{3it}$$

$$+ 1 + e^{it} + e^{2it} + e^{3it} + e^{4it}$$

$$= e^{-4it} + 2e^{-3it} + 3e^{-2it} + 4e^{-it} + 5 + 4e^{it} + 3e^{2it} + 2e^{3it} + e^{4it}$$

4/14

④ Un altro esempio: $n=10$

$$\left(\frac{\cos(21t/2)}{\cos(t/2)} \right)^2$$

$$= e^{-20it} + 2e^{-19it} + \dots + 19e^{-2it} + 20e^{-it}$$

$$+ 21$$

$$+ 20e^{it} + 19e^{2it} + \dots + 2e^{19it} + e^{20it}$$

Per n generale la formula
che corrisponde ai due esempi
è:

$$\left(\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{\cos(\frac{1}{2}t)} \right)^2$$

$$= \sum_{-2n \leq j \leq 2n} (2n+1-|j|) e^{ijt}$$

5/14

$$\boxed{B} \quad (1) \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial r & \partial x / \partial \theta \\ \partial y / \partial r & \partial y / \partial \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \partial r / \partial x & \partial r / \partial y \\ \partial \theta / \partial x & \partial \theta / \partial y \end{pmatrix} = \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$$

$$= \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

6/14

$$= \frac{1}{m} \begin{pmatrix} m \cos \theta & m \sin \theta \\ -m \sin \theta & m \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{m} & \frac{\cos \theta}{m} \end{pmatrix}$$

3

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial m}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial m} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial m} + \frac{\sin \theta}{m} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial m}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial m} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$= \sin \theta \frac{\partial f}{\partial m} + \frac{\cos \theta}{m} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

7/14

$$(4) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right. \\ \left. - i \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} - i \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left((\cos \theta - i \sin \theta) \frac{\partial f}{\partial r} \right.$$

$$\left. - i \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{i}{r} e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2e^{i\theta}} \left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

8/14

[C] Per ottenere valori grandi di $Ax + By + Cz$, basta scegliere x molto grande, ad esempio

$$x = 10^{12}, y = 10^{-6}, z = 10^{-6}.$$

Risulta che l'estremo superiore di $Ax + By + Cz$ vale $(+\infty)$.

Per trovare il minimo:

$$\underline{\nabla} (Ax + By + Cz) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\underline{\nabla} (x y z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

$$A = \lambda yz$$

$$B = \lambda xz$$

$$C = \lambda xy$$

→

$$Ax = \lambda xyz$$

$$By = \lambda xyz$$

$$Cz = \lambda xyz$$

9/14

Uniamo l'astuzia di definire

$$\lambda_2 = \lambda x y z.$$

Risultato

$$\begin{array}{ll} Ax = \lambda_2 & x = \lambda_2 / A \\ By = \lambda_2 \rightarrow & y = \lambda_2 / B \\ Cz = \lambda_2 & z = \lambda_2 / C \end{array}$$

Ora x, y, z sono espressi
in termine di λ_2 . Si
applica il vincolo:

$$1 = xyz = \left(\frac{\lambda_2}{A}\right) \left(\frac{\lambda_2}{B}\right) \left(\frac{\lambda_2}{C}\right) = \frac{\lambda_2^3}{ABC}$$

$$\hookrightarrow \lambda_2^3 = ABC \rightarrow \lambda_2 = (ABC)^{1/3}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (ABC)^{1/3} \begin{pmatrix} 1/A \\ 1/B \\ 1/C \end{pmatrix}$$

10/14

e il valore minimo

$$\min \{ Ax + By + Cz; x, y, z \geq 0 \\ \text{e } xyz = 1 \}$$

$$\text{vale } A(ABC)^{1/3} \frac{1}{A} \\ + B(ABC)^{1/3} \frac{1}{B} \\ + C(ABC)^{1/3} \frac{1}{C}$$

$$= 3(ABC)^{1/3}$$

Con n variabili la risposta
sarebbe

$$\min \{ A_1 x_1 + \dots + A_n x_n; x_1, \dots, x_n \geq 0 \\ \text{e } x_1 x_2 \dots x_n = 1 \}$$

$$= n(A_1 A_2 \dots A_n)^{1/n}$$

11/14

$$\boxed{D} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \Leftrightarrow \rho^2 \leq R^2$$

$$0 \leq \rho \leq R$$

$$z \geq 0 \Leftrightarrow \rho \cos \varphi \geq 0 \Leftrightarrow \cos \varphi \geq 0$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho \sin \varphi \cos \theta \geq 0 \\ \rho \sin \varphi \sin \theta \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta \geq 0 \\ \sin \theta \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\iiint_D z^4 dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{\rho=0}^R (\rho \cos \varphi)^4 \rho^2 \sin \varphi d\rho \right) d\varphi \right) d\theta$$

12/14

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^4 \varphi \sin \varphi \left(\int_{m=0}^R m^6 dm \right) d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^4 \varphi \sin \varphi \cdot R^7/7 d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^7}{7} \cdot \left[-\frac{\cos^5 \varphi}{5} \right]_{\varphi=0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^7}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi R^7}{70}$$

$$\iiint_{\theta} x^4 dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \left(\int_{m=0}^R (m \sin \varphi \cos \theta)^4 \cdot m^2 \sin \varphi dm \right) d\varphi \right) d\theta$$

13/14

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^4 \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cancel{\sec^5 \varphi} \left(\int_{r=0}^R r^6 dr \right) d\varphi \right) d\theta$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{1}{4} \cancel{\sec \theta} \cos^3 \theta \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} + \frac{3}{4} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \cancel{\sec \theta} \cos \theta \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} 1 d\theta \right)$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cancel{\sec^5 \varphi} d\varphi = -\frac{1}{5} \cancel{\cos \varphi} \sec^4 \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\pi/2} + \frac{4}{5} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sec^3 \varphi d\varphi$$

14/14

$$= \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{3} \cos \varphi / \sin^2 \varphi + \frac{2}{3} \right) \Big|_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi$$

$$= \frac{8}{15} (-\cos \varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\pi/2} = \frac{8}{15} \quad \square$$

$$\iiint_{\mathcal{O}} x^4 dV$$

$$= \frac{3\pi}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{R^7}{7}$$

$$= \frac{\pi}{2 \cdot 5} \cdot \frac{R^7}{7} =$$

$$\frac{\pi R^7}{70}$$