

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 24 luglio 2024

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad z = z \quad dx \, dy \, dz = R \, dR \, d\theta \, dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \phi \cos \theta \quad y = r \sin \phi \sin \theta \quad z = r \cos \phi \\ dV = dx \, dy \, dz = r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A. Prendiamo come noto che la trasformata di Fourier di

$$f(t) = e^{-t^2/2} \quad \text{è} \quad \hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

Calcolare le trasformate di Fourier di:

1. $\underbrace{3f(t)}_{\wedge} = e^{-t^2/2},$
2. $f(t-4) = e^{-(t-4)^2/2},$
3. $e^{5it}f(t) = e^{5it}e^{-t^2/2},$ e
4. $f(t/6) = e^{-(t/6)^2/2}.$

B. Si consideri la superficie sferica $\mathcal{S}$ data dall'uguaglianza:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

1. Passando alle coordinate *sferiche*, convertire l'uguaglianza sopra in una formula per r in termini di ϕ e θ . Questo dà una parametrizzazione di $\mathcal{S}$ con parametri ϕ e θ .
2. A cominciare dall'esito precedente, trovare la formula per l'elemento d'area su $\mathcal{S}$ come un fattore moltiplicato per $d\phi d\theta$.

C. Sia $\mathcal{Z}$ la zona nel piano determinata dalle disuguaglianze:

$$0 \leq x \leq 1/2 \qquad x^2 + y^2 \geq 1$$

Prima, fare uno schizzo di $\mathcal{Z}$. (Si osservi che $\mathcal{Z}$ si estende all'infinito.) Poi usare le coordinate *rettangolare* e calcolare

$$\iint_{\mathcal{Z}} \frac{1}{y^2} dA$$

D. Siano $0 \leq B \leq Q$ due parametri fissi. Usare le coordinate *cilindriche* e calcolare il volume della calotta $\mathcal{C}$ determinata dalle disuguaglianze:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq Q^2 \qquad z \geq B$$

(1/9)

A si wa

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

$$\textcircled{1} \int_{t=-\infty}^{\infty} (3 e^{-t^2/2}) e^{-i\omega t} dt$$

$$= 3 \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt$$

$$= 3 \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

$$\textcircled{2} \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-(t-4)^2/2} e^{-i\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} \textcircled{u=t-4} \\ \textcircled{du=dt} \end{aligned} = \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} e^{-i\omega(u+4)} du$$

$$\textcircled{2/9}$$

$$= e^{-i\omega \cdot 4} \int_{u=-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} e^{-i\omega u} du$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{-4i\omega} e^{-\omega^2/2}$$

$$\textcircled{3} \int_{t=-\infty}^{\infty} (e^{5it} e^{-t^2/2}) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i(\omega-5)t} dt$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{-(\omega-5)^2/2}$$

$$\textcircled{4} \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-(t/6)^2/2} e^{-i\omega t} dt$$

$$v = t/6, \quad t = 6v, \quad dt = 6dv$$

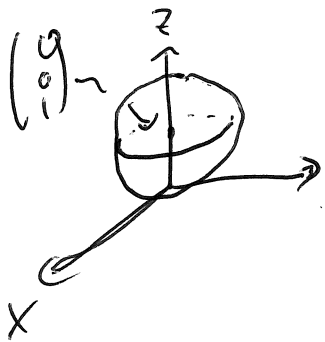
3/9

$$= \int_{v=-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2} e^{-i\omega(6v)} 6 dv$$

$$= 6 \int_{v=-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2} e^{-i(6\omega)v} dv$$

$$= 6 e^{-(6\omega)^2/2}$$

[B] ① $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$



$$\hookrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 1$$

$$\hookrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$

$$\hookrightarrow r^2 = 2r \cos \varphi$$

$$\hookrightarrow r = 2 \cos \varphi$$

② $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \cos \varphi \cos \theta \\ 2 \cos \varphi \cos \varphi \sin \theta \\ 2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}$

4/9

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \varphi} = 2 \begin{pmatrix} (-\tan^2 \varphi + \cot^2 \varphi) \cos \theta \\ (-\tan^2 \varphi + \cot^2 \varphi) \sin \theta \\ -2 \tan \varphi \cot \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \theta} = 2 \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \varphi \cos \theta \\ +\cos \varphi \sin \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \tan \varphi \cot \varphi \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \theta}$$

$$= 4 \tan \varphi \cot \varphi \begin{pmatrix} (-\tan^2 \varphi + \cot^2 \varphi) \cos \theta \\ (-\tan^2 \varphi + \cot^2 \varphi) \sin \theta \\ -2 \tan \varphi \cot \varphi \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

5/9

$$= 4 \tan \varphi \cos \varphi \begin{pmatrix} 2 \tan \varphi \cos \varphi \cos \theta \\ 2 \tan \varphi \cos \varphi \sin \theta \\ (-\tan^2 \varphi + \cos^2 \varphi) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

$$= 4 \tan \varphi \cos \varphi \begin{pmatrix} 2 \tan \varphi \cos \varphi \cos \theta \\ 2 \tan \varphi \cos \varphi \sin \theta \\ (-\tan^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \end{pmatrix}$$

(Il calcolo che segue si semplifica
se si ricorda che

$$\sin(2\varphi) = 2 \tan \varphi \cos \varphi, \quad \cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$\left| \frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \theta} \right|$$

$$= 4 \tan \varphi \cos \varphi$$

$$\cdot \left(4 \tan^2 \varphi \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + 4 \tan^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + (\cos^2 \varphi - \tan^2 \varphi)^2 \right)^{1/2}$$

6/9

$$= 4 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\cdot \left(4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^4 \varphi - 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi \right)^{1/2}$$

$$= 4 \sin \varphi \cos \varphi$$

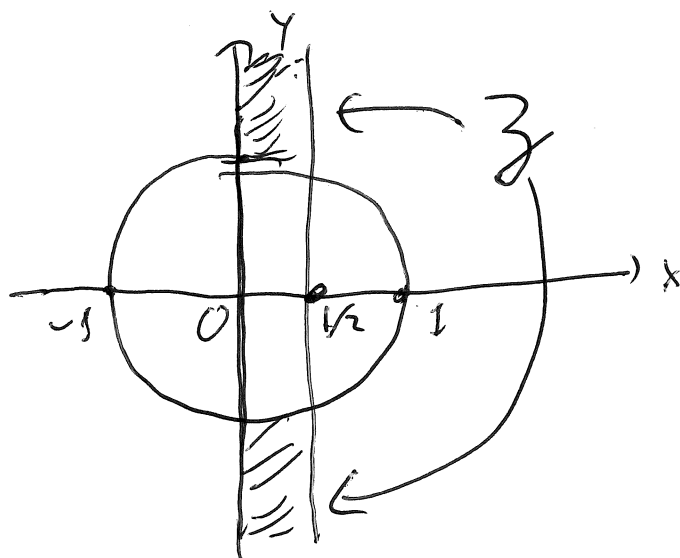
$$\cdot \left(\cos^4 \varphi + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi \right)^{1/2}$$

$$= 4 \sin \varphi \cos \varphi \left((\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 \right)^{1/2}$$

$$= 4 \sin \varphi \cos \varphi (1^2)^{1/2} = 4 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$dS = 4 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta$$

C



7/9

$$x^2 + y^2 \geq 1 \leadsto y^2 \geq 1 - x^2 \\ \leadsto |y| \geq \sqrt{1 - x^2}$$

$$\iint \frac{1}{y^2} dA$$

$$= \int_{x=0}^{1/2} \left(\int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy + \int_{y=-\infty}^{-\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{y^2} dy \right)$$

$$= 2 \int_{x=0}^{1/2} \left(\int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \right)$$

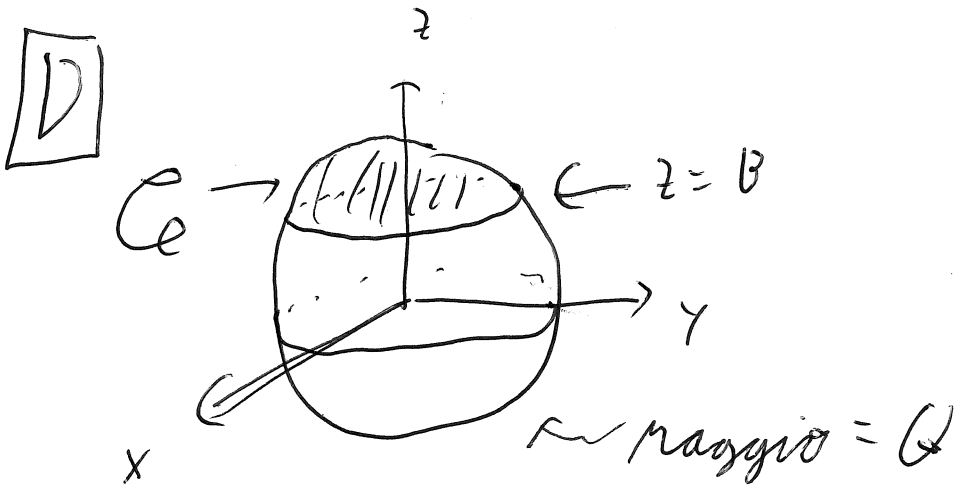
$$= 2 \int_{x=0}^{1/2} \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} dy$$

$$= 2 \int_{x=0}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

8/9

$$= 2 \arcsin x \Big|_{x=0}^{1/2}$$

$$= 2 \arcsin(1/2) = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$



$$x^2 + y^2 + z^2 \leq Q^2$$

$$\hookrightarrow R^2 + z^2 \leq Q^2$$

$$\hookrightarrow R^2 \leq Q^2 - z^2$$

$$\hookrightarrow R \leq \sqrt{Q^2 - z^2}$$

9/9

$$\text{vol}(C) = \iiint_C 1 \, dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{z=b}^a \left(\int_{R=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} 1 \cdot R \, dR \right) dz \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{z=b}^a \left[\frac{R^2}{2} \right]_{R=0}^{\sqrt{a^2-z^2}} dz$$

$$= \pi \int_{z=b}^a (a^2 - z^2) dz$$

$$= \pi \left[a^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=b}^a$$

$$= \pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} - a^2 b + \frac{b^3}{3} \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} (2a^3 - 3a^2 b + b^3)$$