

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 21 giugno 2024

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

$$\int_0^1 t^a (1-t)^b dt = \frac{a! b!}{(a+b+1)!}$$

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

A. Sia $f = f(t)$ la funzione di periodo 2 data da:

$$f(t) = t \quad \text{per } -1 < t \leq +1$$

Si prende come nota la sua serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j}{\pi j} e^{\pi i j t}$$

1. Sulla base della serie nota calcolare $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$.
2. Integrare la serie nota e calcolare la somma $\sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j}{\pi^2 j^2} e^{\pi i j t}$ come funzione periodica di t .
3. Sulla base dell'esito precedente calcolare $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4}$.

B. Siano x , y , e z tre variabili legate dal vincolo $f(x, y, z) = 0$. Si concentra l'attenzione su la particolare terna $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$ sotto l'ipotesi che $f(2, 3, 4) = 0$. Per le terne vicino a quella si può scrivere

$$z = z(x, y) \quad x = x(y, z) \quad y = y(z, x)$$

Poniamo che alla terna $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$ valgono

$$\partial z / \partial x = 2/3 \quad \partial x / \partial y = 3/4$$

Calcolare $\partial z / \partial y$, sempre a quella terna. Conviene cominciare con l'equazione approssimativa per $\Delta f = 0$ in termini di Δx , Δy , e Δz .

C. Si considerino due funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$ con espansioni di Taylor:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \dots \\g(x, y) &= 1 + b_{1,0}x + b_{0,1}y + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2 + \dots\end{aligned}$$

1. Sulla base della formula per la serie geometrica:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$$

trovare l'espansione di Taylor di $f(x, y)/g(x, y)$ fino ai termini di ordine totale 2.

2. Calcolare $\left. \frac{\partial^2(f/g)}{\partial x \partial y} \right|_{x=y=0}$.

D. Siano a , b , e c tre esponenti fissi (ciascuno più grande di -1). Con l'uso della formula verso l'inizio di questo testo calcolare

$$\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} x^a y^b (1-x-y)^c dy \right) dx$$

in termini di fattoriali. Per il primo integrale, conviene usare la sostituzione $y = (1-x)t$. Quale sarebbe la generalizzazione ad un integrale triplo?

$$\frac{1}{9}$$

A ① $R=2$

$$\int_{-R/2}^{R/2} |f(t)|^2 dt = R \sum_j |a_j|^2$$

$$\int_{-1}^1 t^2 dt = 2 \sum_{j \neq 0} \left| \frac{(-1)^j i}{\pi j} \right|^2$$

$$2 \int_0^1 t^2 dt = 2 \sum_{j \neq 0} \frac{1}{\pi^2 j^2}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{j \neq 0} \frac{1}{j^2} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

② Per $-1 < t \leq 1$

2/9

$$t = \sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j i}{\pi j} e^{\pi i j t}$$

$$\frac{t^2}{2} + C = \sum_{j \neq 0} \frac{(-1)^j i}{\pi j} \cdot \frac{1}{\pi i j} e^{\pi i j t}$$

$$= \sum_{j \neq 0} (-1)^j \frac{1}{\pi^2 j^2} e^{\pi i j t}$$

Per determinare C , si osserva
che per ogni $j \neq 0$,

$$\int_{-1}^1 e^{\pi i j t} dt = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 \frac{t^2}{2} + C dt = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{2} + C dt \\ &= 2 \left(\frac{1}{6} + C \right) \end{aligned}$$

onde $C = -1/6$

3/9

Alternativamente, si può valutare
per $\epsilon = 0$:

$$C = \frac{0^2}{2} + C = \sum_{j \neq 0} (-1)^j \frac{1}{\pi^2 j^2} e^0$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{\pi^2 j^2}$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \frac{1}{j^2}$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{-1}{j^2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \left(-\frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{4} \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{2}{\pi^2} \left(-\frac{\pi^2}{12} \right)$$

$$\cancel{t^2} \cancel{t^2} \cancel{t^2} = -1/6$$

$$\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} = \sum_{j \neq 0} (-1)^j \frac{1}{\pi^2 j^2} e^{\pi i j t}$$

(4/9)

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} \right)^2 dt = 2 \sum_{j \neq 0} (-1)^j \left| \frac{1}{\pi^2 j^2} \right|^2$$

$$\hookrightarrow \int_{-1}^1 \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{36} dt = 2 \sum_{j \neq 0} \frac{1}{\pi^4 j^4}$$

$$\hookrightarrow 2 \int_0^1 \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{36} dt = 2 \cdot 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^4 j^4}$$

$$\hookrightarrow 2 \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{18} + \frac{1}{36} \right) = \frac{4}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{10} - \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{4}{\pi^4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4}$$

$$\hookrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{4} \left(\frac{9-10+5}{90} \right) = \left(\frac{\pi^4}{90} \right)$$

[B] Tutte le derivate parziali si valutano per $x=2$, $y=3$, $z=4$;

le differenze, Δf , Δx , Δy , Δz sono calcolate a cominciare da $x=2$, $y=3$, $z=4$.

5/9

$$0 = \Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

Se $\Delta y = 0$, allora

$$0 \approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

$$\hookrightarrow \Delta z \approx - \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z} \Delta x$$

$$\hookrightarrow \frac{z}{3} = \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z}$$

Con un calcolo analogo

$$\frac{3}{4} = \frac{\partial x}{\partial y} = - \frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial x}$$

Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{3}{4} \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{2}{3} \cdot - \frac{3}{4} \frac{\partial f}{\partial z} = + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial z}$$

(6/9)

Finalmente:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial z} = \frac{-\frac{1}{2} \partial f / \partial z}{\partial f / \partial z}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \right)$$

C

① f/g

$$= \frac{(a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \dots)}{(1 + b_{1,0}x + b_{0,1}y + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2 + \dots)}$$

$$= (a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \dots)$$

$$\cdot (1 - b_{1,0}x - b_{0,1}y - b_{2,0}x^2 - b_{1,1}xy - b_{0,2}y^2 - \dots \\ + (b_{1,0}x + b_{0,1}y + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + b_{0,2}y^2 + \dots)^2)$$

Si moltiplica tutto questo, scartando
termini di ordine totale ≥ 3 .

7/9

f/g

$$= a_{1,0} x$$

$$+ a_{0,1} y$$

$$+ a_{2,0} x^2 - a_{1,0} b_{1,0} x^2$$

$$+ a_{1,1} xy - a_{0,1} b_{1,0} xy - a_{1,0} b_{0,1} xy$$

$$+ a_{0,2} y^2 - a_{0,1} b_{0,1} y^2$$

$$+ \dots$$

$$= a_{1,0} x + a_{0,1} y + (a_{2,0} - a_{1,0} b_{1,0}) x^2 \\ + (a_{1,1} - a_{0,1} b_{1,0} - a_{1,0} b_{0,1}) xy \\ + (a_{0,2} - a_{0,1} b_{0,1}) y^2 + \dots$$

② Il coefficiente su xy è

$$\frac{1}{1!1!} \frac{\partial^2 (f/g)}{\partial x \partial y} \Big|_{x=y=0}, \text{ quindi}$$

$$\frac{\partial^2 (f/g)}{\partial x \partial y} \Big|_{x=y=0} = a_{1,1} - a_{0,1} b_{1,0} - a_{1,0} b_{0,1}$$

8/9

[D]

$$y = (1-x)t$$

$$dy = (1-x) dt$$

$$0 \leq y \leq 1-x \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$$

$$\int_{y=0}^{1-x} x^a y^b (1-x-y)^c dy$$

$$= \int_{t=0}^1 x^a (t(1-x))^b (1-x-t(1-x))^c \cdot (1-x) dt$$

$$= \int_{t=0}^1 x^a t^b (1-x)^b ((1-t)(1-x))^c \cdot (1-x) dt$$

$$= x^a (1-x)^b (1-x)^c (1-x) \int_{t=0}^1 t^b (1-t)^c dt$$

$$= x^a (1-x)^{b+c+1} \cdot b! \cdot c! / (b+c+1)!$$

9/9

$$\int_{x=0}^1 x^a (1-x)^{b+c+1} \cdot \frac{b! c!}{(b+c+1)!} dx$$

$$= \frac{a! (b+c+1)!}{(a+b+c+2)!} \cdot \frac{b! c!}{(b+c+1)!}$$

$$= \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!}$$

2' integrals - triple analog =

$$\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} \left(\int_{z=0}^{1-x-y} x^a y^b z^c (1-x-y-z)^d dz \right) dy \right) dx$$

$$= \frac{a! b! c! d!}{(a+b+c+d+3)!}$$