

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 29 febbraio 2024

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggregati capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

A.

1. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(t) = e^{-|t|}$.
2. Usare le formule per la trasformata di Fourier e calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + \omega^2} d\omega$$

3. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t\omega)}{1 + \omega^2} d\omega$$

B. Trovare il massimo e il minimo di pq^2r^3 sotto i vincoli:

$$p, q, r \geq 0$$

$$p + q + r = 6$$

C. Si considerino due funzioni $a(x, y)$ e $b(x, y)$, ciascuna delle quali ha derivate parziali di tutti gli ordini. (Sono due funzioni generiche, non funzioni particolari.) Nel seguente, tutti gli esiti sono da esprimere in termini delle derivate parziali di $a(x, y)$ e $b(x, y)$ per $x = y = 0$.

1. Scrivere l'espansione di Taylor di $a(x, y)$ (attorno a $x = y = 0$) fino ai termini di ordine totale 3. Ci sono 10 termini da includere. Idem per $b(x, y)$.
2. Moltiplicare le espansioni di Taylor di $a(x, y)$ e di $b(x, y)$ e trovare il termine di tipo x^2y nell'espansione di Taylor di $f(x, y) = a(x, y)b(x, y)$ (sempre attorno a $x = y = 0$).
3. Ricalcolare il termine di tipo x^2y nell'espansione di Taylor $f(x, y) = a(x, y)b(x, y)$ tramite il calcolo di una derivata parziale di $f(x, y)$.

D. In spazio 5 dimensionale con coordinate r, s, t, u, v , calcolare la media di v sul volume 5-dimensionale dato dalle disuguaglianze:

$$0 \leq r \leq s \leq t \leq u \leq v \leq 1$$

1/11

$$\boxed{A} \textcircled{1} \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt + \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{(1-i\omega)t} dt + \int_{t=0}^{\infty} e^{(-1-i\omega)t} dt$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} e^{(1-i\omega)t} \Big|_{t=-\infty}^0 + \frac{1}{-1-i\omega} e^{(-1-i\omega)t} \Big|_0^{+\infty}$$

Le valutazioni per $t = \pm \infty$ sono zero poiché

$$|e^{(1-i\omega)t}| = |e^t| \cdot |e^{-i\omega t}| = e^t$$

$\rightarrow 0$ per $t \rightarrow -\infty$

$$|e^{(-1-i\omega)t}| = |e^{-t}| \cdot |e^{-i\omega t}| = e^{-t}$$

$\rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$

2/11

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1-i\omega} (1-0) + \frac{+1}{-1-i\omega} (0-1)$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{(1-i\omega)(1+i\omega)}$$

$$= \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$(2) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{2 e^{i\omega t}}{1+\omega^2} d\omega$$

onde $\int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1+\omega^2} d\omega = \pi f(t)$

$$= \pi e^{-|t|}$$

3/11

(3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)}{1 + \omega^2} d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + \omega^2} d\omega = e^{-|t|}$$

Devono coincidere le parti reali
e immaginarie, onde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1 + \omega^2} d\omega = e^{-|t|}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega t)}{1 + \omega^2} d\omega = 0$$

$$\boxed{B} \quad \nabla(p q^2 m^3) = \begin{pmatrix} q^2 m^3 \\ 2 p q m^3 \\ 3 p q^2 m^2 \end{pmatrix}$$

4/11

$$\nabla(p+q+n) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q^2 n^3 \\ 2p q n^3 \\ 3p q^2 n^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow q^2 n^3 = 2p q n^3, \quad q^2 n^3 = 3p q^2 n^2$$

$$\hookrightarrow q = 2p$$

$$\hookrightarrow n = 3p$$

$$6 = p + q + n = p + 2p + 3p = 6p$$

$$\hookrightarrow p = 1, \quad q = 2, \quad n = 3$$

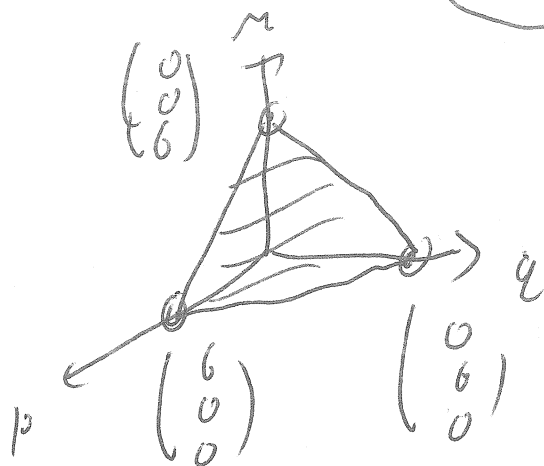
Il valore corrispondente di

$$p \cdot q^2 \cdot n^3$$

$$\text{è } 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 27 = 108$$

5/11



Alla frontiera
del triangolo
determinato
dal vincolo,

uno fra $p, q, e m$ vale 0,
quindi $p q^2 m^3 = 0$. Risulta
che

$$\text{MINIMO} = 0$$

$$\text{MASSIMO} = 108$$

Cruciale seguente, le derivate parziali
sono da valutare per $x = y = 0$

$$\begin{aligned} a(x, y) &= a(0, 0) + \frac{\partial a}{\partial x} x + \frac{\partial a}{\partial y} y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} x^2 \\ &+ \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 a}{\partial x^3} x^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 a}{\partial x^2 \partial y} x^2 y \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 a}{\partial x \partial y^2} x y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 a}{\partial y^3} y^3 + O\left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^4\right) \end{aligned}$$

6/11

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b(0,0) + \frac{\partial b}{\partial x} x + \frac{\partial b}{\partial y} y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} x^2 \\ &+ \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 b}{\partial x^3} x^3 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 b}{\partial x^2 \partial y} x^2 y + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 b}{\partial x \partial y^2} x y^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 b}{\partial y^3} y^3 \\ &+ O(\|x\|^4) \end{aligned}$$

② Quando si moltiplicano le due risposte, vengono fuori molti termini, ma ci interessano solo quelli del tipo $x^2 y$:

$$\begin{aligned} \dots + \frac{1}{2} a(0,0) \frac{\partial^3 b}{\partial x^2 \partial y} x^2 y &+ \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \frac{\partial b}{\partial x} x^2 y \\ &+ \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} x^2 y &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 a}{\partial x^2 \partial y} b(0,0) x^2 y \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} x^2 y &+ \dots \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \frac{\partial b}{\partial y} x^2 y \end{aligned}$$

7/11

③ Nei seguenti calcoli, si valutano le derivate parziali per $x=x$, $y=y$. Solo alla fine si passa a $x=0$, $y=0$.

$$\frac{\partial}{\partial x} (a(x,y) b(x,y)) = \frac{\partial a}{\partial x} \cdot b + a \frac{\partial b}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a(x,y) b(x,y)) &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \cdot b + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + a \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} b + 2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + a \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 (ab)}{\partial y \partial x^2} &= \frac{\partial^3 a}{\partial x^2 \partial y} b + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \frac{\partial b}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \frac{\partial b}{\partial x} \\ &\quad + 2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + a \frac{\partial^3 b}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned}$$

8/11

Il termine di tipo x^2y nell'espansione di Taylor di $a(x,y)b(x,y)$

è

$$\frac{1}{2!1!} \frac{\partial^3(a b)}{\partial x^2 \partial y} \Big|_{x=y=0} x^2 y$$

$$\begin{aligned} = & \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^3 a}{\partial x^2 \partial y} b(0,0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \frac{\partial b}{\partial y} \right. \\ & + \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + a(0,0) \frac{\partial^3 b}{\partial x^2 \partial y} \right) x^2 y \end{aligned}$$

dove tutte le derivate parziali si valutano per $x=y=0$,

Le risposte a (2) e (3) coincidono.

9/11

D

$$0 \leq m \leq s \leq t \leq u \leq v \leq 1$$

$$\hookrightarrow (0 \leq m \leq s) \text{ e } 0 \leq s \leq t \leq u \leq v \leq 1$$

$$\hookrightarrow (0 \leq s \leq t) \text{ e } 0 \leq t \leq u \leq v \leq 1$$

$$\hookrightarrow (0 \leq t \leq u) \text{ e } 0 \leq u \leq v \leq 1$$

$$\hookrightarrow (0 \leq u \leq v) \text{ e } (0 \leq v \leq 1)$$

Scrivo " dV_5 " per l'elemento di volume 5-dimensionale.

$$\int \int \int \int \int 1 \cdot dV_5$$

$$0 \leq m \leq s \leq t \leq u \leq v \leq 1$$

$$= \int_{v=0}^1 \left(\int_{u=0}^v \left(\int_{t=0}^u \left(\int_{s=0}^t \left(\int_{m=0}^s 1 \, dm \right) ds \right) dt \right) du \right) dv$$

10/11

$$= \int_{v=0}^1 \left(\int_{u=0}^v \left(\int_{t=0}^u \left(\int_{s=0}^t s \, ds \right) dt \right) du \right) dv$$

$$= \int_{v=0}^1 \left(\int_{u=0}^v \left(\int_{t=0}^u \frac{1}{2} t^2 \, dt \right) du \right) dv$$

$$= \int_{v=0}^1 \left(\int_{u=0}^v \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot u^3 \, du \right) dv$$

$$= \int_{v=0}^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} v^4 \, dv = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\int \int \int \int \int v \, dV_5$$

$$0 \leq w \leq s \leq t \leq u \leq v \leq 1$$

$$= \int_{v=0}^1 \left(\int_{u=0}^v \left(\int_{t=0}^u \left(\int_{s=0}^t \left(\int_{w=0}^s v \, dw \right) ds \right) dt \right) du \right) dv$$

$$= \int_{v=0}^1 \left(\int_{u=0}^v \left(\int_{t=0}^u \left(\int_{s=0}^t s v \, ds \right) dt \right) du \right) dv$$

11/11

$$= \int_{v=0}^1 \left(\int_{u=0}^v \left(\int_{t=0}^u \frac{1}{2} t^2 v \, dt \right) du \right) dv$$

$$= \int_{v=0}^1 \left(\int_{u=0}^v \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot u^3 v \, du \right) dv$$

$$= \int_{v=0}^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot v^4 \cdot v \, dv$$

$$= \int_{v=0}^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot v^5 \, dv = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$\bar{v} = \frac{\iiint v \, dV}{\iiint 1 \, dV} = \frac{1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6)}{1/(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} = \left(\frac{5}{6} \right)$$