

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 14 febbraio 2024

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad z = z \quad dx dy dz = R dR d\theta dz$$

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

A. Sia $f(t)$ la funzione periodica con periodo $R = 2$ data dalla formula:

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ t & \text{se } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

1. Fare uno schizzo del grafico di $f(t)$ per $-3 \leq t \leq 3$.
2. Calcolare a_j , il j -esimo coefficiente di Fourier di $f(t)$, escludendo il caso $j = 0$. (La risposta è una formula dove c'entra j .)
3. Calcolare a_0 , il zero-esimo coefficiente di Fourier di $f(t)$.
4. Scrivere la serie di Fourier per $f(t)$, includendo esplicitamente solo i termini con $-4 \leq j \leq 4$. (Questa parte non richiede nuovi calcoli, solo la conoscenza dei coefficienti di Fourier.)
5. Molti dei coefficienti di Fourier si annullano. Spiegare questo fenomeno sulla base di una particolare caratteristica di $f(t)$.

B. Si consideri le due superficie definite dalle due equazioni:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 21$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 27$$

1. Controllare che ambedue le superficie passino per il punto comune

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Per ciascuna delle superficie, trovare un vettore perpendicolare alla superficie al punto $\mathbf{P}$.
3. L'intersezione delle due superficie è una curva. Trovare un vettore tangente a quella curva al punto $\mathbf{P}$.

C. Si consideri la parametrizzazione dello spazio 3-dimensionale con parametri p , q , e r secondo le formule:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(p, q, r) \\ y(p, q, r) \\ z(p, q, r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + q + r \\ pq + qr + rp \\ pqr \end{pmatrix}$$

1. Trovare la formula per $dx dy dz$ in termini di $dp dq dr$.
2. Fattorizzare il fattore davanti a $dp dq dr$. (Indicazione: uno dei fattori è $p - q$.)

D. Sia $Q > 0$ un parametro fisso. Sia $\mathcal{O}$ l'ottava parte della sfera determinata da:

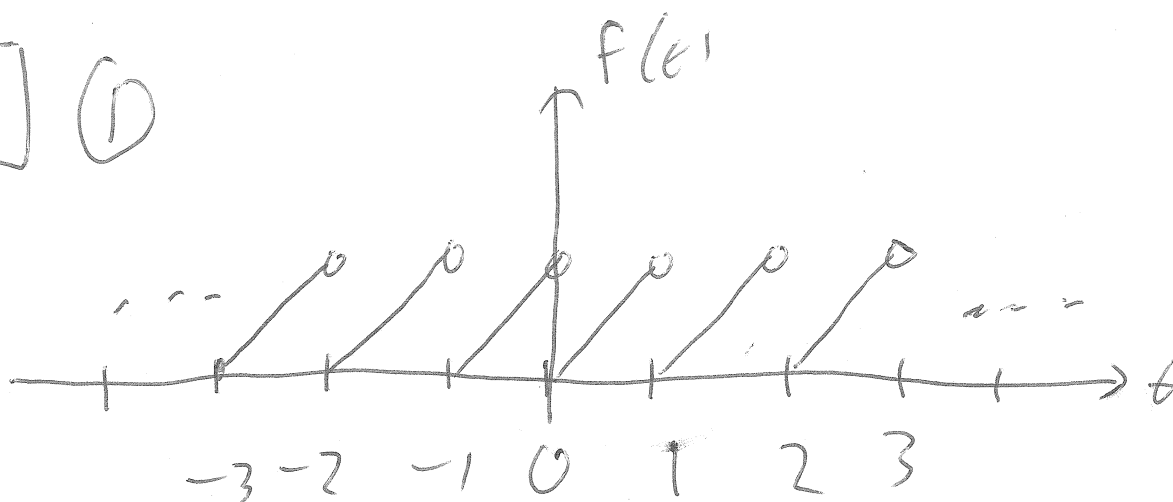
$$x, y, z \geq 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq Q^2$$

Usare le coordinate *cilindriche* e calcolare:

$$\iiint_{\mathcal{O}} z^3 dV$$

1/11

A ①



$$\textcircled{2} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{2\pi i j t / R} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-2\pi i j t / 2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-\pi i j t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 (t+1) e^{-\pi i j t} dt + \int_0^1 t e^{-\pi i j t} dt \right)$$

(2/11)

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 t e^{-\pi i j t} dt + \int_{-1}^0 1 e^{-\pi i j t} dt + \int_0^1 t e^{-\pi i j t} dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 t e^{-\pi i j t} dt + \int_{-1}^0 e^{-\pi i j t} dt \right)$$

! Si usa: $\int e^{kt} dt = \frac{1}{k} e^{kt}$

$$\int t e^{kt} dt = \frac{1}{k} t e^{kt} - \int 1 \cdot \frac{1}{k} e^{kt} dt$$

$$= \frac{1}{k} t e^{kt} - \frac{1}{k^2} e^{kt} \quad \uparrow$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{-\pi i j} t e^{-\pi i j t} \right]_{t=-1}^{t=1} - \frac{1}{(-\pi i j)^2} e^{-\pi i j t} \right]_{t=-1}^{t=1} + \frac{1}{-\pi i j} e^{-\pi i j t} \Big|_{t=-1}^0 \right)$$

3/11

$$\begin{aligned} \Gamma_{\delta} \text{ usa: } e^{\pm \pi i \delta} &= (e^{\pm \pi i})^{\delta} \\ &= (-1)^{\delta} = \begin{cases} +1 & \text{se } \delta \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \delta \text{ è dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{\pi i \delta} (1 \cdot e^{-\pi i \delta} + 1 \cdot e^{\pi i \delta}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{-1}{(\pi i \delta)^2} (e^{-\pi i \delta} - e^{\pi i \delta}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{-1}{\pi i \delta} (1 - e^{\pi i \delta}) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{\pi i \delta} (-1)^{\delta} + \frac{-1}{\pi i \delta} (1 - (-1)^{\delta}) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{cases} -\frac{2}{\pi i \delta} & \text{se } \delta \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } \delta \text{ è dispari} \end{cases} \right)$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\pi i \delta} & \text{se } \delta \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } \delta \text{ è dispari} \end{cases}$$

4/11

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad a_0 &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 t \cdot e^{-\pi i \cdot 0 \cdot t} dt + \int_{-1}^0 e^{-\pi i \cdot 0 \cdot t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 t dt + \int_{-1}^0 1 dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=-1}^1 + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \left(\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad f(t) &= \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \\ &= \sum_j a_j e^{2\pi i j t / 2} \\ &= \sum_j a_j e^{\pi i j t} \\ &= \dots + a_{-3} e^{-3\pi i t} + a_{-2} e^{-2\pi i t} \\ &\quad + a_{-1} e^{-\pi i t} + a_0 e^{0\pi i t} + a_1 e^{1\pi i t} \\ &\quad + a_2 e^{2\pi i t} + a_3 e^{3\pi i t} + \dots \end{aligned}$$

(5/11)

$$= \dots + 0 + \frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi i \epsilon} + 0$$

$$+ \frac{1}{2} e^{0 \cdot \pi i t} + 0 - \frac{1}{2\pi i} e^{2\pi i t} + 0 + \dots$$

⑤ Nella serie di Fourier
appaiono solo i termini con
i pari: $e^{0 \cdot \pi i t}$, $e^{2\pi i t}$, $e^{4\pi i t}$, ...

Questo è quello aspettato per
una funzione di periodo

$$\tilde{R} = 1: \quad e^{2\pi i k t / \tilde{R}} = e^{2\pi i k t / 1} \\ = e^{2\pi i k t}$$

Dal grafico si vede che,

$f(t)$ ha effettivamente periodo

$\tilde{R} = 1$, non solo periodo $R = 2$.

6/11

B

① $4^2 + 2^2 + 1^2 = 16 + 4 + 1 = 21$ ✓

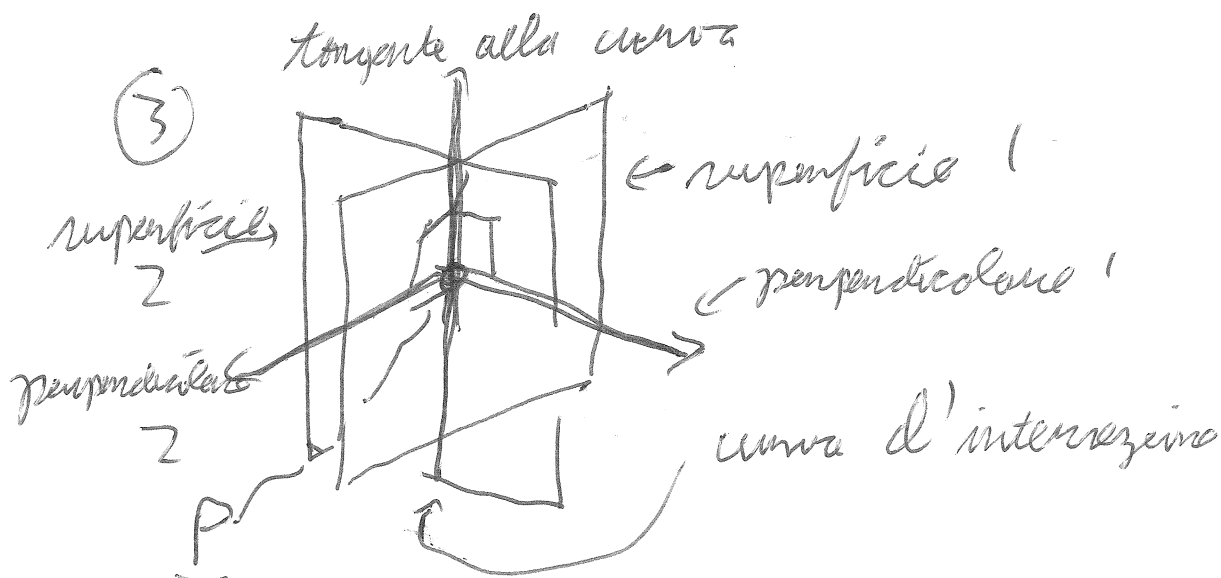
$4^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2 = 16 + 8 + 3 = 27$ ✓

② $\nabla (x^2 + y^2 + z^2) \Big|_{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$= \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Big|_{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\nabla (x^2 + 2y^2 + 3z^2) \Big|_{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$= \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix} \Big|_{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$



7/11

Si vede che il vettore
(la freccia) tangente alla
curva d'intersezione è
perpendicolare a ciascuno dei
vettori perpendicolari alle
due superficie. Perciò,
possiamo calcolarlo come un
prodotto vettoriale:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 6 - 2 \cdot 8 \\ 2 \cdot 8 - 8 \cdot 6 \\ 8 \cdot 8 - 4 \cdot 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ -32 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Anche $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ è tangente alla
curva, essendo parallelo a
 $\begin{pmatrix} 8 \\ -32 \\ 32 \end{pmatrix}$ ma $\frac{1}{8}$ più corto.

8/11

C

①

$$\frac{\partial (p+q+m, p q + q m + m p, p q m)}{\partial (p, q, m)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q+m & p+m & p+q \\ qm & pm & pq \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (p, q, m)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q+m & p+m & p+q \\ qm & pm & pq \end{pmatrix}$$

$$= (p+m) pq + (p+q) qm - (q+m) pm$$

$$- (p+m) qm - (p+q) pm - (q+m) pq$$

$$= p^2 q + pqm - pqm - q^2 m + pqm - m^2 p$$

$$- pqm - m^2 q - p^2 m - pqm - q^2 p - pqm$$

$$= p^2 q - q^2 p + q^2 m - m^2 q + m^2 p - p^2 m$$

9/11

$$dx \, dy \, dz$$

$$= |p^2 q - q^2 p + q^2 m - m^2 q + m^2 p - p^2 m| dp \, dq \, dm$$

$$(2) \quad p^2 q - q^2 p + q^2 m - m^2 q + m^2 p - p^2 m$$

$$= (p - q)(pq + m^2) + (q^2 - p^2)m$$

$$= (p - q)(pq + m^2) + (p - q)(-p - q)m$$

$$= (p - q)(pq - pm - qm + m^2)$$

$$= (p - q)(p - m)(q - m)$$

□ Sempre per le coordinate cilindriche: $R \geq 0$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$$x, y \geq 0 \rightarrow R \cos \theta, R \sin \theta \geq 0$$

$$\rightarrow \cos \theta, \sin \theta \geq 0$$

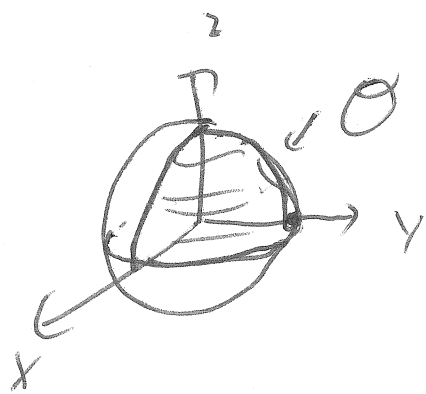
$$\rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

10/11

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq Q^2 \leadsto R^2 + z^2 \leq Q^2$$

$$\leadsto R^2 \leq Q^2 - z^2 \leadsto 0 \leq R \leq \sqrt{Q^2 - z^2}$$

$R^2 + z^2 \leq Q^2$ è possibile solo
se $z^2 \leq Q^2$, quindi $0 \leq z \leq Q$.



$$\iiint_{\theta} z^3 dV$$
$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{z=0}^Q \left(\int_{R=0}^{\sqrt{Q^2-z^2}} z^3 \cdot R dR \right) dz \right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\int_{z=0}^Q z^3 \cdot \frac{R^2}{2} \Big|_{R=0}^{\sqrt{Q^2-z^2}} dz \right)$$

$$11/11$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_{z=0}^Q z^3 (Q^2 - z^2) dz$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_{z=0}^Q Q^2 z^3 - z^5 dz$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(Q^2 \cdot \frac{Q^4}{4} - \frac{Q^6}{6} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} Q^6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{4} Q^6 \frac{1}{12}$$

$$= \frac{\pi Q^6}{48}$$