

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 10 novembre 2023

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A. Sia $G(t) = e^{-t^2/2}$. Per questo esercizio, si usa la formula nota:

$$\hat{G}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} \quad (1)$$

1. Per $f(t)$ generico, calcolare la formula per $\widehat{df/dt}(\omega)$ in termini di $\hat{f}(\omega)$.
2. Usare (1) e la prima parte e trovare una funzione $h(t)$ tale che $\hat{h}(\omega) = \omega^3 e^{-\omega^2/2}$.

B. Siano A , B , e C tre fissi parametri positivi. Trovare il minimo di

$$A/x + B/y + C/z$$

sotto i vincoli

$$x, y, z > 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

C. Sia $Q > 0$ un parametro fisso. Si parametrizza la superficie sferica $\mathcal{S}$ data da $x^2 + y^2 + z^2 = Q^2$ con le coordinate sferiche:

$$x = Q \sin \phi \cos \theta \quad y = Q \sin \phi \sin \theta \quad z = Q \cos \phi$$

1. Calcolare l'elemento di superficie dS come multiplo di $d\phi d\theta$.
2. Calcolare

$$\iint_{\mathcal{S}} x^2 dS, \quad \iint_{\mathcal{S}} y^2 dS, \quad \text{e} \quad \iint_{\mathcal{S}} z^2 dS$$

D. Sia $T > 0$ un parametro fisso. Calcolare:

$$\iiint_{0 \leq p \leq q \leq r \leq T} (q-p)(r-p)(r-q) dp dq dr$$

1/10

A ①

$$\left(\widehat{\frac{df}{dt}}\right)(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \left[f(t) e^{-i\omega t} \right]_{t=-\infty}^{\infty} - \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) (-i\omega e^{-i\omega t}) dt$$

↗

Questo vale 0 poiché usiamo la trasformata di Fourier solo quando $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$

$$= i\omega \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \boxed{i\omega \hat{f}(\omega)}$$

②

$$\hat{G}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

$$\frac{d\hat{G}}{d\omega}(\omega) = \sqrt{2\pi} (i\omega) e^{-\omega^2/2}$$

2/10

$$\widehat{\left(\frac{d^2 G}{dt^2}\right)}(\omega) = \sqrt{2\pi} (i\omega)^2 e^{-\omega^2/2}$$

$$\widehat{\left(\frac{d^3 G}{dt^3}\right)}(\omega) = \sqrt{2\pi} (i\omega)^3 e^{-\omega^2/2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot i^3} \cdot \frac{d^3 G}{dt^3} \right)(\omega) = \omega^3 e^{-\omega^2/2}$$

← questo è $h(t)$

$$G(t) = e^{-t^2/2}$$

$$\frac{dG}{dt} = -t e^{-t^2/2}$$

$$\frac{d^2 G}{dt^2} = (t^2 - 1) e^{-t^2/2}$$

$$\frac{d^3 G}{dt^3} = (-t^3 + 3t) e^{-t^2/2}$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot i^3} (-t^3 + 3t) e^{-t^2/2}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} (-t^3 + 3t) e^{-t^2/2}$$

3/10

[B]

$$\nabla (A/x + B/y + C/z)$$

$$= \begin{pmatrix} -A/x^2 \\ -B/y^2 \\ -C/z^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \nabla (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$-A/x^2 = 2\lambda x$$

$$x^3 = -2\lambda A = \lambda_2 A$$

$$-B/y^2 = 2\lambda y \Rightarrow$$

$$y^3 = -2\lambda B = \lambda_2 B$$

$$-C/z^2 = 2\lambda z$$

$$z^3 = -2\lambda C = \lambda_2 C$$

$$\text{con } \lambda_2 = -2\lambda$$

$$\Rightarrow x^3 = \lambda_2^{1/3} A^{1/3} = \lambda_3 A^{1/3}$$

$$y^3 = \lambda_2^{1/3} B^{1/3} = \lambda_3 B^{1/3}$$

$$z^3 = \lambda_2^{1/3} C^{1/3} = \lambda_3 C^{1/3}$$

$$\text{con } \lambda_3 = \lambda_2^{1/3}$$

$$1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = (\lambda_3 A^{1/3})^2 + (\lambda_3 B^{1/3})^2 + (\lambda_3 C^{1/3})^2$$

$$= \lambda_3^2 (A^{2/3} + B^{2/3} + C^{2/3})$$

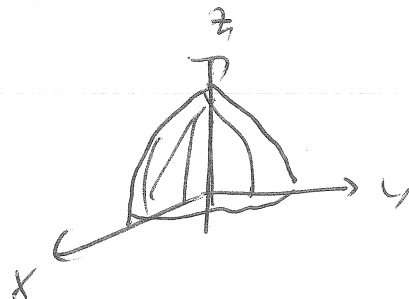
$$\hookrightarrow \lambda_3 = (A^{2/3} + B^{2/3} + C^{2/3})^{-1/2}$$

4/10

Il punto di (possibile) minimo
è stato calcolato. Il minimo
stesso è

$$\begin{aligned} & \frac{A}{\lambda_3 A^{1/3}} + \frac{B}{\lambda_3 B^{1/3}} + \frac{C}{\lambda_3 C^{1/3}} \\ &= \frac{(A^{2/3} + B^{2/3} + C^{2/3})}{\lambda_3} \\ &= \frac{(A^{2/3} + B^{2/3} + C^{2/3})}{(A^{2/3} + B^{2/3} + C^{2/3})^{-1/2}} = (A^{2/3} + B^{2/3} + C^{2/3})^{3/2} \end{aligned}$$

Se $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ si avvicina alla
frontiera della superficie
d'interesse



○ $x \rightarrow 0$ ○ $y \rightarrow 0$ ○ $z \rightarrow 0$

(5/10)

e in ogni caso $\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} \rightarrow +\infty$.

Il minimo non si può trovare
verso la frontiera. Perciò
deve essere il valore calcolato
sopra.

[C]

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} Q \cos \varphi \cos \theta \\ Q \cos \varphi \sin \theta \\ Q \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q \sin \varphi \cos \theta \\ -Q \sin \varphi \sin \theta \\ Q \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} Q \cos \varphi \cos \theta \\ Q \cos \varphi \sin \theta \\ Q \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Q \cos \varphi \sin \theta \\ Q \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -Q \sin \varphi \cos \theta \\ -Q \sin \varphi \sin \theta \\ Q \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -Q \cos \varphi \sin \theta \\ Q \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= Q^2 \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

6/10

$$= Q^2 \sin \varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= Q^2 \sin \varphi \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

$$= Q^2 \sin \varphi \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\left| Q^2 \sin \varphi \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \right|$$

$$= Q^2 \sin \varphi \left(\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \right)^{1/2}$$

$$= Q^2 \sin \varphi \left(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right)^{1/2}$$

$$= Q^2 \sin \varphi$$

$$dS = Q^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta$$

7/10

$$(2) \iint_S x^2 dS = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} (Q \cos \varphi \cos \theta)^2 \cdot Q^2 \sin \varphi d\varphi \right) d\theta$$

$$= Q^4 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \right) d\theta$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi = -\frac{1}{3} \sin^2 \varphi \cos \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\pi} + \frac{2}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin \varphi d\varphi$$

$$= 0 + \frac{2}{3} \cdot 2 = 4/3$$

$$\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta \Big|_{\theta=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} 1 d\theta$$

$$\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \Big|_{\theta=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} 1 d\theta = \pi$$

(8/10)

$$\iint_S x^2 dS = Q^4 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta \cdot \frac{4}{3} d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{3} Q^4$$

$$\iint_S y^2 dS = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} (Q \cos \varphi \sin \theta)^2 - Q^2 \sin^2 \varphi d\varphi \right) d\theta$$

$$= Q^4 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi \right) d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{3} Q^4$$

$$\iint_S z^2 dS = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} (Q \cos \varphi)^2 - Q^2 \sin^2 \varphi d\varphi \right) d\theta$$

$$= Q^4 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right) d\theta$$

$$= 2\pi Q^4 \left[-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{\pi} = \frac{2\pi Q^4}{3} (-(-1)^3 - (-1^3))$$

(9/10)

$$\approx \frac{2\pi Q^4}{3} (+1+1) = \frac{4\pi Q^4}{3}$$

[D]

$$0 \leq p \leq q \leq M \leq T \rightarrow 0 \leq p \leq q$$

$$\hookrightarrow 0 \leq q \leq M \leq T \rightarrow 0 \leq q \leq M$$

$$\hookrightarrow 0 \leq M \leq T$$

$$\int_{M=0}^T \left(\int_{q=0}^M \left(\int_{p=0}^q (q-p)(M-p)(M-q) dp \right) dq \right) dM$$

$$\approx \int_{M=0}^T \left(\int_{q=0}^M (M-q) \left(\int_{p=0}^q qM - qp - Mp + p^2 dp \right) dq \right) dM$$

$$= \int_{M=0}^T \int_{q=0}^M (M-q) \left(qM \cdot q - q \cdot \frac{q^2}{2} - M \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{3} \right) dq dM$$

$$\approx \int_{M=0}^T \dots$$

10/10

$$= \int_{n=0}^T \left(\int_{q=0}^n (n-q) \left(\frac{1}{2} n q^2 - \frac{1}{6} q^3 \right) dq \right) dn$$

$$= \int_{n=0}^T \left(\int_{q=0}^n \left(\frac{1}{2} n^2 q^2 - \frac{1}{6} n q^3 - \frac{1}{2} n q^3 + \frac{1}{6} q^4 \right) dq \right) dn$$

$$= \int_{n=0}^T \left(\int_{q=0}^n \left(\frac{1}{2} n^2 q^2 - \frac{2}{3} n q^3 + \frac{1}{6} q^4 \right) dq \right) dn$$

$$= \int_{n=0}^T \left(\frac{1}{2} n^2 \cdot \frac{n^3}{3} - \frac{2}{3} n \cdot \frac{n^4}{4} + \frac{1}{6} \frac{n^5}{5} \right) dn$$

$$= \int_{n=0}^T \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{30} \right) n^5 dn$$

$$= \frac{1}{30} \int_{n=0}^T n^5 dn = \frac{1}{30} \cdot \frac{T^6}{6} = \frac{T^6}{180}$$