

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 29 settembre 2023

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad z = z \quad dx dy dz = R dR d\theta dz$$

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A. Sia $g(t) = e^{-t^2/2}$. Per questo esercizio, si usa il fatto che

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2} \quad (1)$$

Usare (1) e l'integrazione per parti due volte e calcolare la trasformata di Fourier di $t^2 e^{-t^2/2}$. (Indicazione: conviene che uno dei fattori nell'integrazione per parti sia $t e^{-t^2/2}$.)

B. Si consideri la superficie data dall'equazione $t = f(x, y)$ in spazio 3-dimensionale con coordinate t, x , e y . Su questa superficie si consideri un punto $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, dove per forza $t_0 = f(x_0, y_0)$. Si lavori con l'ipotesi che tutte le derivate parziali di $f(x, y)$ esistono.

1. Trovare un vettore perpendicolare alla data superficie al dato punto.
2. Trovare l'equazione del piano tangente alla data superficie al dato punto. (Indicazione: il vettore perpendicolare alla superficie deve essere perpendicolare anche al piano tangente.) Scrivere questa equazione come un'equazione per t in termini di x e y .
3. Spiegare come sarebbe la storia se si cominciasse con l'ipersuperficie data da l'equazione $t = f(x, y, z)$ in spazio 4-dimensionale.

C. Sia $h = h(t)$ una funzione tutte le cui derivate esistono. Siano A e B due parametri fissi.

1. Scrivere l'espansione di Taylor di $h(t)$ attorno al punto $t = 0$.
2. Sulla base della prima parte, scrivere l'espansione di Taylor di $h(Ax + By)$ attorno al punto $x = y = 0$.
3. Usare le derivate parziali per ricalcolare tutti i termini di ordine ≤ 2 dell'espansione di $h(Ax + By)$. Verificare che questi termini coincidono con quelli ottenuti precedentemente.

D. Sia $\mathcal{F}$ la forma definita da

$$x^2 + y^2 \leq 1 \qquad 0 \leq z \leq y$$

Fare un disegno di $\mathcal{F}$. Poi, usare le coordinate cilindriche e calcolare il volume di $\mathcal{F}$.

(1/9)

A L'equazione (1) vuol dire

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

Allora:

$$\begin{aligned} & \int_{t=-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{t=-\infty}^{\infty} (t e^{-t^2/2}) \cdot (t e^{-i\omega t}) dt \\ &= \left(-e^{-t^2/2} \right) (t e^{-i\omega t}) \Big|_{t=-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int_{t=-\infty}^{\infty} (-e^{-t^2/2}) (e^{-i\omega t} - i\omega t e^{-i\omega t}) dt \end{aligned}$$

Si nota che $|(-e^{-t^2/2}) (t e^{-i\omega t})|$

$$= \frac{|t|}{e^{t^2/2}} \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow \pm \infty.$$

2/9

e il calcolo continuo

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt - i\omega \int_{t=-\infty}^{\infty} (te^{-t^2/2})(e^{-i\omega t}) dt$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

$$- i\omega \left(-e^{-t^2/2} \right) (e^{-i\omega t}) \Big|_{t=-\infty}^{\infty}$$

$$+ i\omega \int_{t=-\infty}^{\infty} (-e^{-t^2/2}) (-i\omega e^{-i\omega t}) dt$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} - \omega^2 \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2} - \omega^2 \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

$$= \sqrt{2\pi} (1 - \omega^2) e^{-\omega^2/2}$$

[B] ① $t = f(x, y) \Leftrightarrow t - f(x, y) = 0$

$$\nabla (t - f(x, y)) = \begin{pmatrix} \partial/\partial t \\ \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix} (t - f(x, y)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\partial f/\partial x \\ -\partial f/\partial y \end{pmatrix}$$

3/9

Per ottenere il vettore perpendicolare al punto $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ occorre valutare a quel punto:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (-\partial f / \partial x)_{x=x_0, y=y_0} \\ (-\partial f / \partial y)_{x=x_0, y=y_0} \end{pmatrix}$$

2) L'equazione del piano tangente ha la forma

$$1 - t - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot x - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot y = C$$

Per il calcolo di C , si usa il fatto che il piano passa per $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$t_0 - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot x_0 - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot y_0 = C$$

4/9

Donque, l'equazione del piano è

$$t - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot x - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot y$$

$$= t_0 - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot x_0 - \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot y_0$$

ossia

$$t = t_0 + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0} \cdot (y-y_0)$$

- ③ $t = f(x, y, z)$ determina un'ipersuperficie di dimensione 3 dentro spazio di dimensione 4 con coordinate t, x, y, z . Si cerca un iperpiano di dimensione 3 tangente all'ipersuperficie al punto $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

5/9

Oltre alle dimensioni, non cambia nulla, e l'equazione del iperpiano tangente viene

$$t = t_0 + \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0, z=z_0} \cdot (x-x_0) \\ + \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{x=x_0, y=y_0, z=z_0} \cdot (y-y_0) \\ + \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{x=x_0, y=y_0, z=z_0} \cdot (z-z_0)$$

$$\boxed{C} \textcircled{1} \quad h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n h}{dt^n} \Big|_{t=0} \cdot \frac{t^n}{n!}$$

$$= h(0) + h'(0)t + h''(0)\frac{t^2}{2} \\ + h'''(0)\frac{t^3}{6} + \dots$$

6/9

(2) Si sostituisce $Ax+By$ per t :

$$\begin{aligned} h(Ax+By) &= h(0) + h'(0)(Ax+By) \\ &\quad + h''(0) \frac{(Ax+By)^2}{2} \\ &\quad + h'''(0) \frac{(Ax+By)^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

(3) $h(Ax+By)$

$$\frac{\partial h(Ax+By)}{\partial x} = A h'(Ax+By)$$

$$\frac{\partial h(Ax+By)}{\partial y} = B h'(Ax+By)$$

$$\frac{\partial^2 h(Ax+By)}{\partial x^2} = A^2 h''(Ax+By)$$

$$\frac{\partial^2 h(Ax+By)}{\partial x \partial y} = AB h''(Ax+By)$$

(7/9)

$$\frac{\partial^2 h(Ax+By)}{\partial y^2} = B^2 h''(Ax+By)$$

Per l'espansione di Taylor attorno al punto $x=y=0$, si valutano le derivate per $x=y=0$, quindi per $Ax+By=0$

$$\begin{aligned} h(Ax+By) &= h(0) \frac{x^0 y^0}{0! 0!} + A h'(0) \frac{x^1 y^0}{1! 0!} \\ &+ B h'(0) \frac{x^0 y^1}{0! 1!} + A^2 h''(0) \frac{x^2 y^0}{2! 0!} \\ &+ AB h''(0) \frac{x^1 y^1}{1! 1!} + B^2 h''(0) \frac{x^0 y^2}{0! 2!} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= h(0) + h'(0) \cdot (Ax+By) + h''(0) \cdot \left(\frac{A^2 x^2}{2} + ABx + \frac{B^2 y^2}{2} \right) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= h(0) + h'(0) \cdot (Ax+By) \\ &\quad + h''(0) \cdot \frac{1}{2} (Ax+By)^2 + \dots \end{aligned}$$

8/9

$$\boxed{D} \quad x^2 + y^2 \leq 1 \rightarrow R^2 \leq 1 \rightarrow 0 \leq R \leq 1$$

$$0 \leq z \leq y \rightarrow 0 \leq z \leq R \sin \theta$$

$$\text{Occurrence} \quad 0 \leq R \sin \theta \rightarrow 0 \leq \sin \theta \\ \rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\iiint_{\mathcal{F}} 1 \, dV = \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{R=0}^1 \left(\int_{z=0}^{R \sin \theta} R \, dz \right) dR \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{R=0}^1 R^2 \sin \theta \, dR \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{3} \sin \theta \, d\theta$$

$$= \left. -\frac{1}{3} \cos \theta \right|_{\theta=0}^{\pi} = \left(-\frac{1}{3} \right) (-1) - \left(-\frac{1}{3} \right) (1) \\ = \boxed{2/3}$$

9/9

