

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 14 settembre 2023

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \phi \cos \theta \quad y = r \sin \phi \sin \theta \quad z = r \cos \phi$$
$$dV = dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$$

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A.

1. Dimostrare che se $g(t) = \overline{f(-t)}$ allora $\hat{g}(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$.
2. Calcolare $\hat{f}(\omega)$ quando

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

3. Sulla base delle prime due parti, trovare una funzione $h(t)$ tale che $\hat{h}(\omega) = 1/(1 + \omega^2)$.

B. Trovare il valore minimo di $x^2 + y^2 + z^2$ sotto i vincoli

$$3x + 2y + z = 30$$

$$3x - 2y + z = -10$$

C. Si consideri questa parametrizzazione di una superficie in $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^t - e^{-t}) \cos \theta \\ (e^t - e^{-t}) \sin \theta \\ (e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}$$

con parametri t e θ .

1. Verificare che su questa superficie vale l'equazione $z^2 = 4 + x^2 + y^2$. Quale forma geometrica corrisponde a questa equazione?
2. Calcolare l'elemento d'area dS su questa superficie in termini dei dati parametri.
3. Sia A un parametro positivo. Calcolare l'area della parte della superficie corrispondente alle condizioni $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq t \leq A$.

D. Siano l e B parametri fissi con valori positivi. Usare le coordinate sferiche e calcolare il volume del cono $\mathcal{C}$ definito da

$$0 \leq z \leq B$$

$$x^2 + y^2 \leq l^2 z^2$$

Inoltre calcolare il raggio R del disco che è il “soffitto” di $\mathcal{C}$.

1/13

$$\boxed{A} \textcircled{1} \quad \hat{g}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} \overline{f(-t)} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{i\omega t} dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} \overline{f(-t)} e^{i\omega t} dt$$

$$\textcircled{t = -t', dt = -dt'} = - \int_{t'=-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} e^{-i\omega t'} dt'$$

$$= + \int_{t'=-\infty}^{\infty} \overline{f(t')} e^{-i\omega t'} dt' = \widehat{\hat{f}}(\omega)$$

$$\textcircled{2} \quad \hat{f}(t) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{t=0}^{+\infty} e^{-(1+i\omega)t} dt = \left. \frac{-1}{1+i\omega} e^{-(1+i\omega)t} \right|_{t=0}^{+\infty}$$

(2/13)

$$= \frac{-1}{1+i\omega} [0-1] = \frac{1}{1+i\omega}$$

dove $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(1+i\omega)t} = 0$ poiché

$$|e^{-(1+i\omega)t}| = |e^{-t} e^{-i\omega t}| = e^{-t}.$$

③ Per $f(t)$ come di sopra in parte
2, $g(t) = \overline{f(-t)} = \begin{cases} e^t & \text{re } t \leq 0 \\ 0 & \text{re } t > 0 \end{cases}$

$$\text{e } \hat{g}(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)} = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1}{1-i\omega}$$

Si scrive

$$\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{(1+i\omega)(1-i\omega)} = \frac{A}{1+i\omega} + \frac{B}{1-i\omega}$$

$\hookrightarrow J = A(1-i\omega) + B(1+i\omega)$

$$\omega = i \leadsto J = A(1-(-1)) + 0 = 2A \leadsto A = \frac{1}{2}$$

$$\omega = -i \leadsto J = 0 + B(1+(1)) = 2B \leadsto B = \frac{1}{2}$$

3/13

e risulta

$$\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+i\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-i\omega} = \frac{1}{2} \hat{f}(\omega) + \frac{1}{2} \hat{g}(\omega)$$

$$= \left(\frac{1}{2} f + \frac{1}{2} g \right)^\wedge(\omega) = \hat{h}(\omega)$$

con $h = \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} g$.

$$h(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-t} & \text{re } t \geq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{re } t = 0 \\ \frac{1}{2} e^t & \text{re } t < 0 \end{cases}$$

Il valore al singolo punto $t=0$
non è importante, perciò

possiamo usare $h(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$

(B) $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$

$$g_1(x) = 3x + 2y + z$$

$$g_2(x) = 3x - 2y + z$$

(4/13)

$$\underline{\nabla} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \underline{\nabla} g_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\nabla} g_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1' \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2' \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3(\lambda_1' + \lambda_2') \\ 2(\lambda_1' - \lambda_2') \\ (\lambda_1' + \lambda_2') \end{pmatrix}$$

Si usano anche i vincoli come equazioni

$$\begin{aligned} 30 &= 3x + 2y + z = 9(\lambda_1' + \lambda_2') + 4(\lambda_1' - \lambda_2') + (\lambda_1' + \lambda_2') \\ &= 14\lambda_1' + 6\lambda_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -10 &= 3x - 2y + z = 9(\lambda_1' + \lambda_2') - 4(\lambda_1' - \lambda_2') + (\lambda_1' + \lambda_2') \\ &= 6\lambda_1' + 14\lambda_2' \end{aligned}$$

5/13

$$\begin{cases} 14\lambda_1' + 6\lambda_2' = 30 \\ 6\lambda_1' + 14\lambda_2' = -10 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 7\lambda_1' + 3\lambda_2' = 15 \\ 3\lambda_1' + 7\lambda_2' = -5 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{49-9} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 105 + 15 \\ -45 - 35 \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 120 \\ -80 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(Oppure si può risolvere il sistema con Gauss-Jordan, o con qualsiasi altro metodo.)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(\lambda_1' + \lambda_2') \\ 2(\lambda_1' - \lambda_2') \\ (\lambda_1' + \lambda_2') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-5) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 + 100 + 1 = \boxed{110}$$

(6/13)

Se 110 non fosse il valore minimo, il minimo si troverebbe verso ∞ , cioè per $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \infty$,
ma in quel caso $x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow +\infty$.

□ ① $4 + x^2 + y^2$

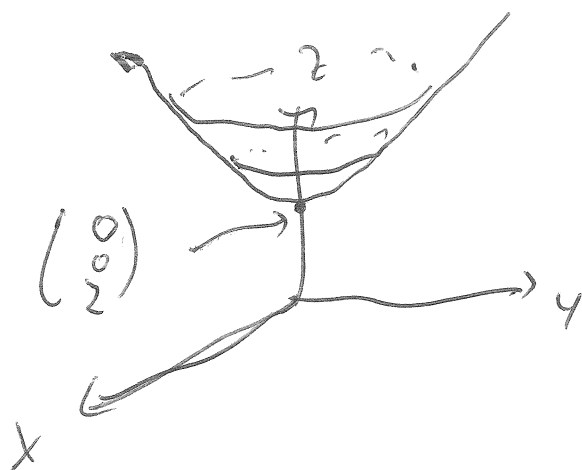
$$= 4 + (e^t - e^{-t})^2 \cos^2 \theta + (e^t - e^{-t})^2 \sin^2 \theta$$

$$= 4 + (e^t - e^{-t})^2 = 4 + e^{2t} - 2e^0 + e^{-2t}$$

$$= 4 + e^{2t} - 2 + e^{-2t} = e^{2t} + 2 + e^{-2t}$$

$$= (e^t + e^{-t})^2 = z^2$$

Questa è l'equazione di un iperboloide.



7/13

$$(2) \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} (e^t - e^{-t}) \cos \theta \\ (e^t - e^{-t}) \sin \theta \\ e^t + e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^t + e^{-t}) \cos \theta \\ (e^t + e^{-t}) \sin \theta \\ e^t - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} (e^t - e^{-t}) \cos \theta \\ (e^t - e^{-t}) \sin \theta \\ (e^t + e^{-t}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(e^t - e^{-t}) \sin \theta \\ (e^t - e^{-t}) \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (e^t + e^{-t}) \cos \theta \\ (e^t + e^{-t}) \sin \theta \\ e^t - e^{-t} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -(e^t - e^{-t}) \sin \theta \\ (e^t - e^{-t}) \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -(e^t - e^{-t})^2 \cos \theta \\ -(e^t - e^{-t})^2 \sin \theta \\ (e^t + e^{-t})(e^t - e^{-t})(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{vmatrix}$$

$$= (e^t - e^{-t}) \begin{vmatrix} -(e^t - e^{-t}) \cos \theta \\ -(e^t - e^{-t}) \sin \theta \\ (e^t + e^{-t}) \end{vmatrix}$$

8/13

$$= (e^t - e^{-t}) \left((e^t - e^{-t})^2 (\omega^2 \theta + \sin^2 \theta) + (e^t + e^{-t})^2 \right)^{1/2}$$

$$= (e^t - e^{-t}) \left((e^t - e^{-t})^2 + (e^t + e^{-t})^2 \right)^{1/2}$$

$$= (e^t - e^{-t}) \left(e^{2t} - 2 + e^{-2t} + e^{2t} + 2 + e^{-2t} \right)^{1/2}$$

$$= (e^t - e^{-t}) \left(2(e^{2t} + e^{-2t}) \right)^{1/2}$$

$$dS = \sqrt{2} \cdot (e^t - e^{-t}) (e^{2t} + e^{-2t})^{1/2} dt d\theta$$

③ Si deve calcolare

$$\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{t=0}^A \sqrt{2} (e^t - e^{-t}) (e^{2t} + e^{-2t})^{1/2} dt \right) d\theta$$

$$= 2\pi \sqrt{2} \int_{t=0}^A (e^t - e^{-t}) (e^{2t} + e^{-2t})^{1/2} dt$$

9/13

Serve una sostituzione difficile ad immaginare:

$$u = e^t + e^{-t} \quad du = (e^t - e^{-t}) dt$$

$$e^{2t} + e^{-2t} = (e^t + e^{-t})^2 - 2 = u^2 - 2$$

$$\int_{t=0}^A (e^t - e^{-t}) (e^{2t} + e^{-2t})^{1/2} dt$$

$$= \int_{u=2}^{e^A + e^{-A}} \sqrt{u^2 - 2} du$$

Salto il calcolo di quest'ultima integrale, ma si può usare la sostituzione $u = \sqrt{2} \cdot \sec v$

~~$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{u^2 - 2} + \log(u + \sqrt{u^2 - 2}) \right)$$~~

10/13

$$= \left[\frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - 2} - \log(u + \sqrt{u^2 - 2}) \right]_{u=2}^{e^A + e^{-A}}$$

$$= \frac{1}{2} (e^A + e^{-A}) \sqrt{(e^A + e^{-A})^2 - 2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{4 - 2} \\ - \log(e^A + e^{-A} + \sqrt{(e^A + e^{-A})^2 - 2}) + \log(2 + \sqrt{2^2 - 2})$$

$$= \frac{1}{2} (e^A + e^{-A}) \sqrt{e^{2A} + e^{-2A}} - \sqrt{2} \\ - \log(e^A + e^{-A} + \sqrt{e^{2A} + e^{-2A}}) + \log(2 + \sqrt{2})$$

$$e^{2\pi\sqrt{2}} \Big)_{t=0}^A (e^t - e^{-t}) (e^{2t} + e^{-2t})^{1/2} dt$$

$$= \left(\pi \left(\sqrt{2} (e^A + e^{-A}) \sqrt{e^{2A} + e^{-2A}} - 2 \right) \right. \\ \left. + 2\pi\sqrt{2} \left(-\log(e^A + e^{-A} + \sqrt{e^{2A} + e^{-2A}}) + \log(2 + \sqrt{2}) \right) \right)$$

11/13

D

$$0 \leq z \rightarrow \cancel{1} \cos \varphi \geq 0 \rightarrow \cos \varphi \geq 0$$

insieme con il vincolo universale

$$0 \leq \varphi \leq \pi \quad \text{dà} \quad \varphi \leq \pi/2$$

$$z \leq b \rightarrow r \cos \varphi \leq b \rightarrow r \leq b / \cos \varphi$$

$$x^2 + y^2 \leq l^2 z^2$$

$$\hookrightarrow (r \cos \varphi \cos \theta)^2 + (r \cos \varphi \sin \theta)^2 \leq l^2 (r \cos \varphi)^2$$

$$\rightarrow \cos^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \leq l^2 \cos^2 \varphi$$

$$\hookrightarrow \cos^2 \varphi \leq l^2 \cos^2 \varphi \rightarrow \cos \varphi \leq l \cos \varphi$$

$$\rightarrow \tan \varphi \leq l \rightarrow \varphi \leq \varphi_0 = \arctan l$$

$$\iiint_{\mathcal{C}} 1 \, dV = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi_0} \left(\int_{r=0}^{b/\cos \varphi} r^2 \cos \varphi \, dr \right) d\varphi \right) d\theta$$

12/13

$$= 2\pi \int_{\varphi=0}^{\varphi_0} \frac{1}{3} \left(\frac{b}{\cos \varphi} \right)^3 \sin \varphi \, d\varphi$$

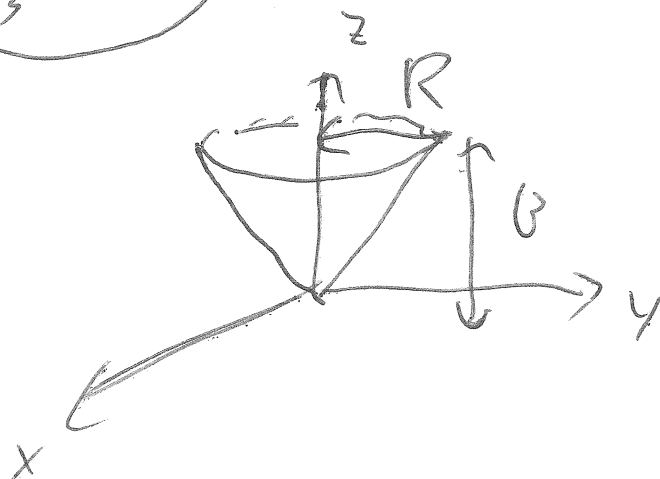
$$= \frac{2\pi b^3}{3} \int_{\varphi=0}^{\varphi_0} \sin \varphi \cdot (\cos \varphi)^{-3} \, d\varphi$$

$$= \frac{2\pi b^3}{3} \left[+\frac{1}{2} (\cos \varphi)^{-2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi_0}$$

$$= \frac{\pi b^3}{3} [(\cos \varphi_0)^{-2} - 1]$$

$$= \frac{\pi b^3}{3} [\sec^2 \varphi_0 - 1] = \frac{\pi b^3}{3} \tan^2 \varphi_0$$

$$= \frac{\pi b^3 \ell^2}{3}$$



(13/13)

Si sa che il volume di C vale $\frac{\pi b R^2}{3}$, onde

$$\frac{\pi b R^2}{3} = \frac{\pi b^3 \ell^2}{3} \leadsto R^2 = b^2 \ell^2$$

$$\leadsto \boxed{R = b \ell}$$

Più direttamente, il soffitto si trova nel piano orizzontale dove $z = b$. Su quel piano

$$x^2 + y^2 \leq \ell^2 z^2 = \ell^2 b^2 = (\ell b)^2,$$

cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è nel disco di raggio ℓb .