

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 29 giugno 2023

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggregati capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

A. Sia $f(t) = 1/(1+t^2)$. La trasformata di Fourier di $f(t)$ è

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-i\omega t} dt = \pi e^{-|\omega|}$$

Per questo esercizio si può prendere quella formula per buona. Siano A e B due parametri fissi, ambedue positivi.

1. Calcolare le trasformate di Fourier di $g(t) = 1/(A^2 + t^2)$ e di $h(t) = 1/(B^2 + t^2)$ sulla base della formula qui sopra.

2. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \hat{h}(\omega) d\omega$$

3. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) h(t) dt$$

con il metodo di decomposizione in frazioni più semplici.

4. I due integrali danno lo stesso esito. Spiegare perché deve essere così.

B. Siano A , B , e C parametri fissi, tutti positivi. Calcolare il valore massimo e il valore minimo di $x^2 + y^2 + z^2$ sotto il vincolo

$$x^2/A^2 + y^2/B^2 + z^2/C^2 = 1$$

C. Siano A , B , e C parametri fissi, tutti positivi. Si considera la superficie

$$\mathcal{E} = \{(x, y, z); x^2/A^2 + y^2/B^2 + z^2/C^2 = 1\} \quad (1)$$

Per quanto possa interessare, $\mathcal{D}$ è la superficie di un ellissoide.

1. Poniamo che (x, y, z) sia un punto di $\mathcal{E}$. Usando le derivate parziali, trovare un vettore che è perpendicolare ad $\mathcal{E}$ a quel punto.
2. Verificare che le formule qui sotto danno una parametrizzazione di $\mathcal{E}$

$$x = A \sin \phi \cos \theta \quad y = B \sin \phi \sin \theta \quad z = C \cos \phi$$

con parametri ϕ e θ .

3. Calcolare $\partial(x, y, z)/\partial\phi$ e $\partial(x, y, z)/\partial\theta$. Usando questi, trovare un vettore perpendicolare ad $\mathcal{E}$ al punto (x, y, z) .
4. Controllare che i due vettori perpendicolari calcolati sono paralleli. (Non è detto che devono essere identici.)

D. Siano A , B , C , D , E e F parametri fissi con A , D , e F positivi. Calcolare il volume dell'ellissoide dato da

$$(Ax + By + Cz)^2 + (Dy + Ez)^2 + (Fz)^2 \leq 1$$

Indicazione: trattare il volume come un integrale ed usare l'evidentissimo cambiamento di variabili:

$$p = Ax + By + Cz \quad q = Dy + Ez \quad r = Fz$$

$$1/11$$

A ① C'è una formula che dà la trasformata di Fourier di $f(t/A)$ sulla base della trasformata di Fourier di $f(t)$. Si può usare quella.

Ecco invece un calcolo diretto:

$$\hat{g}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{A^2 + t^2} e^{-i\omega t} dt \quad \begin{matrix} t=As \\ dt=Ad s \end{matrix}$$

$$= \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{A^2 + A^2 s^2} e^{-i\omega As} A ds$$

$$= \frac{1}{A} \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} e^{-i\omega As} ds = \frac{\pi}{A} e^{-A|\omega|}$$

Altre tanto $\hat{h}(\omega) = \frac{\pi}{B} e^{-B|\omega|}$

2/11

$$(2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \hat{h}(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{A} e^{-A|\omega|} \frac{\pi}{B} e^{-B|\omega|} d\omega$$

$$= \frac{\pi}{2AB} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(A+B)|\omega|} d\omega$$

$$= \frac{\pi}{AB} \int_0^{\infty} e^{-(A+B)\omega} d\omega$$

$$= \frac{\pi}{AB} \cdot \frac{-1}{A+B} \cdot e^{-(A+B)\omega} \Big|_{\omega=0}^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{AB(A+B)}$$

$$(3) g(t)h(t) = \frac{1}{A^2+t^2} \cdot \frac{1}{B^2+t^2}$$

$$= \frac{1}{B^2-A^2} \left(\frac{1}{A^2+t^2} - \frac{1}{B^2+t^2} \right)$$

3/11

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{A^2+t^2} dt$$

$$t = As \\ dt = A ds$$

$$= \frac{1}{A} \int_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} ds$$

$$s = \tan \theta \quad 1+s^2 = \sec^2 \theta \\ ds = \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{A} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sec^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{A} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} 1 d\theta = \frac{\pi}{A}$$

ed altrettanto $\int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{B^2+t^2} dt = \frac{\pi}{B}$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{B^2-A^2} \left(\frac{1}{A^2+t^2} - \frac{1}{B^2+t^2} \right) dt$$

$$= \frac{1}{B^2-A^2} \left(\frac{\pi}{A} - \frac{\pi}{B} \right) = \frac{\pi(B-A)}{(B^2-A^2)AB}$$

$$= \frac{\pi}{AB(A+B)}$$

(4/11)

④ La formula generale è

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} g(t) \overline{h(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \overline{\hat{h}(\omega)} d\omega$$

In quanto $h(t) = \frac{1}{b^2 + t^2}$ è

$$\hat{h}(\omega) = \frac{\pi}{b} e^{-b|\omega|} \quad \text{sono}$$

funzioni reali in questo caso, risulta (in questo caso)

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} g(t) h(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \hat{h}(\omega) d\omega$$

[B] Poniamo che $A < B < C$.

$$\nabla \left(\cancel{x^2} x^2 + y^2 + z^2 \right) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

$$\nabla \left(x^2/A^2 + y^2/B^2 + z^2/C^2 \right) = \begin{pmatrix} 2x/A^2 \\ 2y/B^2 \\ 2z/C^2 \end{pmatrix}$$

5/11

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x/A^2 \\ 2y/B^2 \\ 2z/C^2 \end{pmatrix} \leadsto \begin{aligned} x &= \lambda x / A^2 \\ y &= \lambda y / B^2 \\ z &= \lambda z / C^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leadsto A^2 x &= \lambda x & (\lambda - A^2)x &= 0 \\ B^2 y &= \lambda y & (\lambda - B^2)y &= 0 \\ C^2 z &= \lambda z & (\lambda - C^2)z &= 0 \end{aligned}$$

1° caso: $\lambda \neq A^2, \lambda \neq B^2, \lambda \neq C^2$

Risultano $x=y=z=0$, che non soddisfa $x^2/A^2 + y^2/B^2 + z^2/C^2 = 1$

2° caso: $\lambda = A^2$

Risultano $y=z=0$ e il vincolo

$$x^2/A^2 + 0^2/B^2 + 0^2/C^2 = 1 \text{ implica}$$

$$x = \pm A. \text{ Dunque } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Possibile massimo/minimo

$$= x^2 + y^2 + z^2 = A^2$$

6/11

3° caso: $\lambda = b^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

4° caso: $\lambda = c^2$

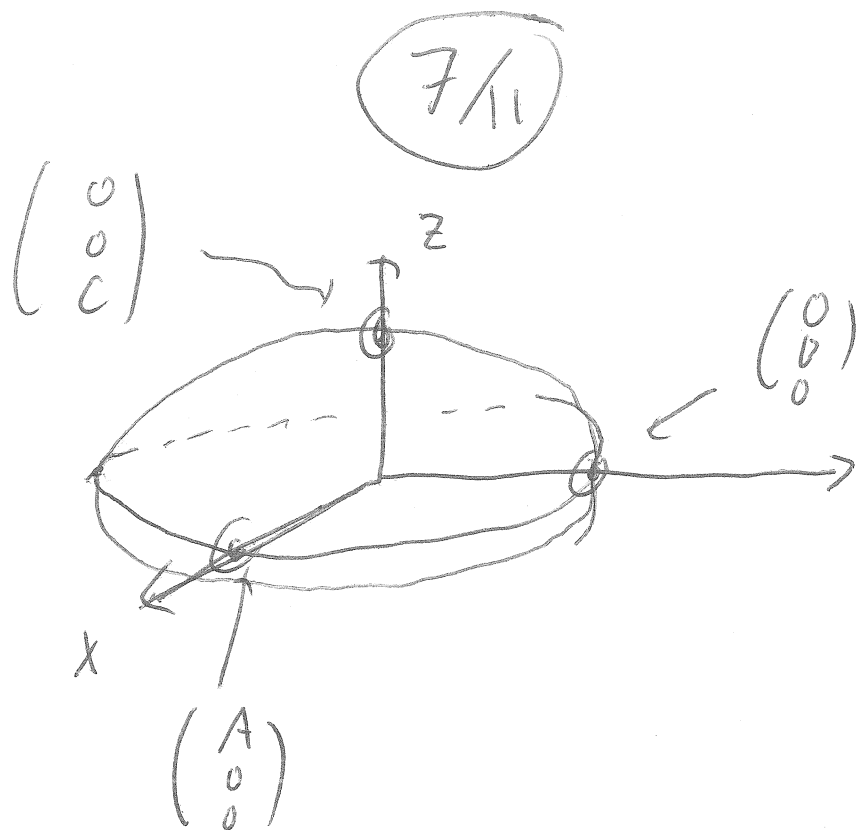
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm c \end{pmatrix}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

Esito: $\min(x^2 + y^2 + z^2) = A^2$
 $\max(x^2 + y^2 + z^2) = C^2$

Commento: Si può fare
senza moltiplicatori di
Lagrange. Con $0 < A \leq b \leq c$

$$\begin{aligned} A^2 \left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) &\leq x^2 + y^2 + z^2 \leq C^2 \left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \\ // & \\ A^2 &= C^2 \end{aligned}$$

e i due valori estremi si trovano
a $\begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ rispettivamente.



C ① $\nabla (x^2/A^2 + y^2/B^2 + z^2/C^2)$

$$= \begin{pmatrix} 2x/A^2 \\ 2y/B^2 \\ 2z/C^2 \end{pmatrix}$$

è il vettore
perpendicolare
ad $\mathcal{E}$.

② $(A \cos \varphi \cos \theta)^2/A^2 + (B \cos \varphi \sin \theta)^2/B^2 + (C \sin \varphi)^2/C^2$

$$= \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi$$

$$= \cos^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

8/11

$$(3) \quad \frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} A \cos \varphi \cos \theta \\ B \cos \varphi \sin \theta \\ -C \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -A \sin \varphi \sin \theta \\ B \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questi due vettori sono tangenti ad $\mathcal{E}$ (al punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$); perciò il loro prodotto vettoriale è perpendicolare ad $\mathcal{E}$ (al punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$).

$$\begin{pmatrix} A \cos \varphi \cos \theta \\ B \cos \varphi \sin \theta \\ -C \sin \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -A \sin \varphi \sin \theta \\ B \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B C \sin^2 \varphi \cos \theta \\ A C \sin^2 \varphi \sin \theta \\ A B (\sin \varphi \cos \varphi) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B C \sin^2 \varphi \cos \theta \\ A C \sin^2 \varphi \sin \theta \\ A B \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}$$

9/11

④

$$= \text{sen } \varphi \begin{pmatrix} BC \text{ sen } \varphi \cos \theta \\ AC \text{ sen } \varphi \text{ sen } \theta \\ AB \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \text{sen } \varphi \begin{pmatrix} BC - \frac{1}{A} x \\ AC - \frac{1}{b} y \\ AB - \frac{1}{c} z \end{pmatrix}$$

$$= \text{sen } \varphi \begin{pmatrix} ABC - \frac{1}{A^2} x \\ ABC - \frac{1}{b^2} y \\ ABC - \frac{1}{c^2} z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\text{sen } \varphi \cdot ABC}{2} \begin{pmatrix} 2x/A^2 \\ 2y/b^2 \\ 2z/c^2 \end{pmatrix},$$

parallelo alla risposta per ①.

□D

$$\frac{\partial (p, q, r)}{\partial (x, y, z)} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & D & E \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

10/11

Il modo veloce di calcolare

$$\det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p, q, r)} \right) \text{ è}$$

$$\det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p, q, r)} \right) = \det \left(\left(\frac{\partial(p, q, r)}{\partial(x, y, z)} \right)^{-1} \right)$$

↑
inverso
di matrice

$$= \frac{1}{\det \left(\frac{\partial(p, q, r)}{\partial(x, y, z)} \right)}$$

$$= \frac{1}{ABF}$$

Usiamo p, q, r come nuove variabili
ossia come parametri per spazio (x, y, z) .

$$\begin{aligned} & \iiint \int dx dy dz \\ & (Ax + By + Cz)^2 \\ & + (Dy + Ez)^2 \\ & + (Fz)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\frac{11}{11}$$

$$= \iiint_{p^2+q^2+m^2 \leq 1} 1 \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(p,q,m)} \right| dp dq dm$$

$$= \frac{1}{ADF} \iiint_{p^2+q^2+m^2 \leq 1} 1 dp dq dm$$

$$= \frac{4\pi}{3ADF}$$

volume della sfera
di raggio 1.