

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 13 giugno 2023

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \phi \cos \theta & y &= r \sin \phi \sin \theta & z &= r \cos \phi \\dV &= dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta\end{aligned}$$

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A.

1. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(t) = e^{-|t|}$.
2. Calcolare la trasformata di Fourier di $g(t) = 1/(1+t^2)$ sulla base della prima risposta.

B. Calcolare il valore massimo e il valore minimo di $\log r + \log s + \log t + \log u$ sotto i vincoli:

$$r, s, t, u \geq 0$$

$$rstu = 24$$

C. Poniamo che per $t \rightarrow 0$ vale

$$x = x(t) = O(t^2)$$

$$y = y(t) = O(t^3)$$

Trovare un polinomio di Taylor per e^{x+y} (attorno al punto $x = y = 0$) tale che il termine d'errore sia $O(t^7)$. Si omettono termini che possono essere inclusi in quel termine d'errore.

D. Siano $Q > 0$ un parametro fisso. Sia S' la sfera data da:

$$x^2 + (y - Q)^2 + z^2 \leq Q^2$$

Prima fare uno schizzo di S' . Poi usare le coordinate sferiche e calcolare

$$\iiint_{S'} r \, dV$$

(Qui r significa la coordinata sferica r .)

1/8

A ①

$$\hat{f}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-it\omega} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^0 e^t e^{-it\omega} dt + \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} e^{-it\omega} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^0 e^{(1-i\omega)t} dt + \int_{t=0}^{\infty} e^{(-1-i\omega)t} dt$$

$$= \left. \frac{1}{1-i\omega} e^{(1-i\omega)t} \right|_{t=-\infty}^0 + \left. \frac{1}{-1-i\omega} e^{(-1-i\omega)t} \right|_{t=0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} - 0 + 0 - \frac{1}{-1-i\omega}$$

(poiché $|e^{(1-i\omega)t}| = |e^t| \cdot |e^{-i\omega t}| = e^t$

$\rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$,

e altrettanto $|e^{(-1-i\omega)t}| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$)

$$\frac{2}{8}$$

$$= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

② Dalla prima parte risulta

$$e^{-|t|} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+\omega^2} e^{i\omega t} d\omega$$

onde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} e^{i\omega t} d\omega = \pi e^{-|t|}$$

Possiamo scambiare le lettere "w" e "t" senza cambiare il senso della formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{itw} dt = \pi e^{-|w|}$$

3/8

e troviamo

$$\hat{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{-i\omega t} dt = \pi e^{-|\omega|}$$
$$= \pi e^{-|\omega|}$$

(B) $\log n + \log s + \log t + \log u$

$$= \log(nst u) = \log(24)$$

sotto il vincolo $nst u = 24$.

Perciò, l'espressione è costante (sotto il vincolo) e il massimo e il minimo sono ambedue $\log(24)$.

Che cosa viene fuori con i moltiplicatori di Lagrange?

(4/8)

$$\begin{pmatrix} 1/m \\ 1/s \\ 1/t \\ 1/u \end{pmatrix} = \nabla (\log m + \log t + \log s + \log u) \\ = \lambda \nabla (mstu) = \lambda \begin{pmatrix} stu \\ mtu \\ msu \\ mst \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1/m = \lambda stu \\ 1/s = \lambda mtu \\ 1/t = \lambda msu \\ 1/u = \lambda mst \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1/mstu \\ \lambda = 1/mstu \\ \lambda = 1/mstu \\ \lambda = 1/mstu \end{cases}$$

$$\rightarrow \lambda = 1/24$$

ma non si trovano condizioni

per m, s, t, u : ogni punto

$\begin{pmatrix} m \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ è un punto critico

e un possibile luogo di

massimo o minimo.

(5/8)

È la verità! Il massimo/minimo
 $\log(24)$ si trova ~~ad ogni~~ a ciascun
punto.

[C] In quanto $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \frac{\partial^k}{\partial y^k} e^{x+y} = e^{x+y}$

per j e k qualsiasi, e in
quanto $e^{x+y}|_{x=y=0} = 1$, la serie
di Taylor è

$$e^{x+y} = \sum_{j,k \geq 0} \frac{x^j y^k}{j! k!}$$

Un esempio: $x^2 y = (O(t^2))^2 O(t^3)$
 $= O(t^7),$

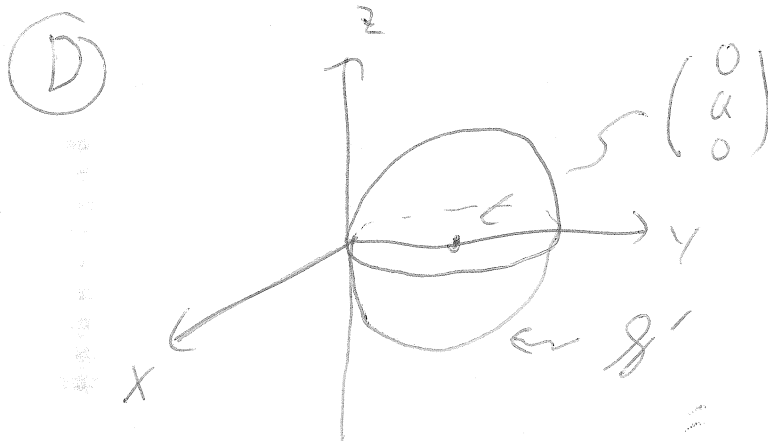
donque il termine con $x^2 y$
deve essere inglobato nell'errore.

6/8

$$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + xy + \frac{x^3}{6} + \frac{y^2}{2} + O(t^7)$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $O(1) \quad O(t^2) \quad O(t^3) \quad O(t^4) \quad O(t^5) \quad O(t^6) \quad O(t^7)$

per $t \rightarrow 0$.



$$\begin{aligned}
 & x^2 + (y-a)^2 + z^2 \leq r^2 \\
 & \hookrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + a^2 + z^2 \leq r^2 \\
 & \hookrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ay \\
 & \hookrightarrow r^2 \leq 2ay \text{ when } y = a \\
 & \hookrightarrow r \leq \sqrt{2}a \text{ when } y = a
 \end{aligned}$$

7/8

Occorre che $2Q \cos \varphi \cos \theta \geq 0$.

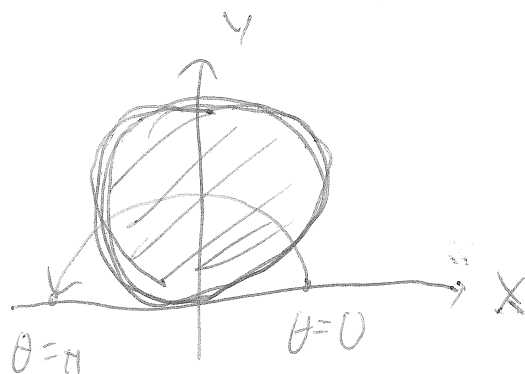
Si usa sempre $0 \leq \varphi \leq \pi$, quindi $\cos \varphi \geq 0$ sempre. Perciò, serve

che $\cos \theta \geq 0$, e deve essere

che $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Questo si

vede anche dalla proiezione

di S' nel piano $-(x, y)$



$$\iiint_{S'} \rho \, dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int_{\rho=0}^{2Q \cos \theta \cos \varphi} \rho - \rho^2 \cos \varphi \, d\rho \right) d\varphi \right) d\theta$$

8/8

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{(2Q \cos \theta \cos \varphi)^4}{4} \cos \varphi d\varphi \right) d\theta$$

$$= 4Q^4 \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^4 \theta \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^5 \varphi d\varphi \right) d\theta$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^5 \varphi d\varphi = -\frac{1}{5} \cos \varphi / \cos^4 \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\pi} + \frac{4}{5} \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos^3 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} \cos \varphi d\varphi = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot 2$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3}{4} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi} 1 d\theta = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi$$

$$= 4Q^4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \cdot 2 = \left(\frac{8}{5} \pi Q^4 \right)$$