

DA FOTOCOPIARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 28 febbraio 2023

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \phi \cos \theta \quad y = r \sin \phi \sin \theta \quad z = r \cos \phi$$
$$dV = dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$$

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

A. Si ricordi che la serie di Taylor per e^u è

$$e^u = \sum_{n \geq 0} u^n/n! = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + u^4/24 + \dots$$

Sia $f(t) = e^{e^{it}} = e^{(e^{it})}$.

1. Usare la serie di Taylor per e^u e ottenere velocemente la serie di Fourier per $f(t)$.
2. Sulla base di quella serie di Fourier, calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-nit} f(t) dt$ e $\int_{-\pi}^{\pi} e^{nit} f(t) dt$ per $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.
3. Sia $n \geq 1$ un intero. Usare l'integrazione per parti ed esprimere $\int z^{-n-1} e^z dz$ in termini di $\int z^{-n} e^z dz$.
4. Sulla base della risposta precedente, esprimere $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-nit} f(t) dt$ in termini di $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(n-1)it} f(t) dt$.
5. Controllare che la risposta di (4) è coerente con i valori ottenuti in (2).

B.

1. Usare le derivate per calcolare il termine di ordine 3 nella serie di Taylor di $(1+t)^{1/2}$.
2. Usare le derivate parziali per calcolare i 4 termini di ordine totale 3 nella serie di Taylor di $(1+x+y)^{1/2}$. (Ordine totale vuol dire la somma degli esponenti su di x e su di y .)
3. Come si potrebbe ottenere la risposta a (2) dalla risposta a (1)?

C. Sia C un parametro fisso. Sia $g(x, y) \geq 0$ una funzione arbitraria tale che $\iint_{\mathbf{R}^2} g(x, y) dx dy < +\infty$. Poniamo

$$\begin{pmatrix} x(s, t) \\ y(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t + Cs \end{pmatrix}$$

1. Calcolare $dA = dx dy$ in termini di s e t .
2. Riscrivere $\iint_{\mathbf{R}^2} g(x, y) dx dy$ usando s e t .
3. Fare due sostituzioni, l'una dopo l'altra, e dimostrare che l'integrale $ds dt$ vale $\iint_{\mathbf{R}^2} g(u, v) du dv$ senza usare nessuna formula per dA .

D. Siano $A > B > 0$ parametri fissi. Sia $\mathcal{S}$ la superficie del *sferoide oblato* determinato da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \sin \phi \cos \theta \\ A \sin \phi \sin \theta \\ B \cos \phi \end{pmatrix} \quad \text{per } 0 \leq \phi \leq \pi, -\pi \leq \theta \leq \pi$$

1. Fare uno schizzo di $\mathcal{S}$ e/o descrivere il suo aspetto.
2. Calcolare la formula per dA su $\mathcal{S}$ in termini di ϕ e θ .
3. Calcolare l'area di $\mathcal{S}$. (Indicazione: l'integrale da svolgere non è facile. Per cominciare conviene usare la sostituzione $t = \cos \phi$.)

1/13

A

$$(1) f(t) = e^{e^{it}}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (e^{it})^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} e^{int}$$

$$(2) \text{ For } n \geq 0$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt = a_n = \frac{1}{n!},$$

$$\text{or } \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt = \left(\frac{2\pi}{n!} \right)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{+int} f(t) dt = a_{-n} = 0$$

$$(\text{re } n \neq 0)$$

$$\text{or } \int_{-\pi}^{\pi} e^{+int} f(t) dt = 0$$

$$(\text{re } n \neq 0)$$

2/13

$$(3) \int z^{-n-1} e^z dz$$

$$= \left(-\frac{1}{n} z^{-n}\right) e^z - \int \left(-\frac{1}{n} z^{-n}\right) e^z dz$$

$$= -\frac{1}{n} z^{-n} e^z + \int \frac{1}{n} z^{-n} e^z dz$$

$$(4) \int e^{-nit} f(t) dt$$

$$= \int e^{-nit} e^{eit} dt$$

$$\begin{aligned} z &= e^{it} \\ dz &= i e^{it} dt \end{aligned}$$

$$= \int e^{-nit} e^{eit} \frac{1}{i e^{it}} i e^{it} dt$$

$$= \int z^{-n} e^z \frac{1}{iz} dz$$

$$= \frac{1}{i} \int z^{-(n+1)} e^z dz$$

3/13

$$= -\frac{1}{ni} z^{-n} e^z + \frac{1}{ni} \int z^{-n} e^z dz$$

$$= -\frac{1}{ni} e^{-int} e^{e^{it}} + \frac{1}{ni} \int e^{-int} e^{e^{it}} (i e^{it}) dt$$

$$= -\frac{1}{ni} e^{-int} e^{e^{it}} + \frac{1}{n} \int e^{-i(n-1)t} e^{e^{it}} dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-nit} dt$$

$$= -\frac{1}{ni} e^{-int} e^{e^{it}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-1)t} e^{e^{it}} dt$$

$$= (\text{in quanto } e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1)$$

$$= -\frac{1}{ni} \left((-1)^n e^{-1} - (-1)^n e^{-1} \right) + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-1)t} e^{e^{it}} dt$$

$$= \left(\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-1)t} f(t) dt \right)$$

4/13

$$(5) \int_{-n}^n e^{-nit} f(t) dt = \frac{2\pi}{n!}$$

↘ (≡)

$$\frac{1}{n} \int_{-n}^n e^{-(n-1)it} f(t) dt = \frac{1}{n} \cdot \frac{2\pi}{(n-1)!} = \frac{2\pi}{n!}$$

B

$$(1) \frac{d}{dt} (1+t)^{1/2} = \frac{1}{2} (1+t)^{-1/2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (1+t)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) (1+t)^{-3/2}$$

$$\frac{d^3}{dt^3} (1+t)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) (1+t)^{-5/2}$$

$$\left. \frac{d^3}{dt^3} (1+t)^{1/2} \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

$$(1+t)^{1/2} = \dots + \frac{3}{8} \frac{t^3}{3!} + \dots$$

$$= \dots + \frac{1}{16} t^3 + \dots$$

5/13

2)

$$\frac{\partial}{\partial x} (1+x+y)^{1/2} = \frac{\partial}{\partial y} (1+x+y)^{1/2} = \frac{1}{2} (1+x+y)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (1+x+y)^{1/2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (1+x+y)^{1/2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (1+x+y)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) (1+x+y)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} (1+x+y)^{1/2} = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} (1+x+y)^{1/2} = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} (1+x+y)^{1/2}$$

$$= \frac{\partial^3}{\partial y^3} (1+x+y)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) (1+x+y)^{-5/2}$$

Valutate per $x=y=0$, tutte queste
terze derivate danno $3/8$.

$$(1+x+y)^{1/2} = \dots + \frac{3}{8} \frac{x^3}{3!} + \frac{3}{8} \frac{x^2 y}{2! 1!}$$

$$+ \frac{3}{8} \frac{x y^2}{1! 2!} + \frac{3}{8} \frac{y^3}{3!} + \dots$$

$$= \dots + \left(\frac{1}{16} x^3 + \frac{3}{16} x^2 y + \frac{3}{16} x y^2 + \frac{1}{16} y^3 \right) + \dots$$

6/13

(3) Nella formula di (1),
mettiamo $t = x+y$

$$(1+x+y)^{1/2} = (1+t)^{1/2}$$

$$= \dots + \frac{1}{16} t^3 + \dots$$

$$= \dots + \frac{1}{16} (x+y)^3 + \dots$$

$$= \dots + \left(\frac{1}{16} (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \right) + \dots;$$

d'accordo con la formula di (2).

$$\boxed{C} \quad (1) \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial(s, t+Cs)}{\partial(s,t)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \det \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right) \right| = |1 \cdot 1 - C \cdot 0| = |1| = 1$$

7/13

$$dA = dx \, dy = \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} \right| ds \, dt \\ = 1 \, ds \, dt = ds \, dt$$

$$(2) \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \, dx \, dy \\ = \iint_{\mathbb{R}^2} g(s, t + Cs) \, ds \, dt$$

$$(3) \iint_{\mathbb{R}^2} g(s, t + Cs) \, ds \, dt \\ = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{s=-\infty}^{+\infty} g(s, t + Cs) \, ds \right) dt \\ = \int_{s=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{t=-\infty}^{+\infty} g(s, t + Cs) \, dt \right) ds$$

Nell'integrale dt il valore di s è costante. Perciò possiamo

8/13

sostituire

$$\begin{aligned} V &= t + Cs \\ dv &= (1+0)dt = dt \end{aligned}$$

ed ottenere

$$= \int_{s=-\infty}^{\infty} \left(\int_{v=-\infty}^{\infty} g(s,v) dv \right) ds$$

Per l'integrale ds si
sostituisce

$$\begin{aligned} s &= u \\ ds &= du \end{aligned}$$

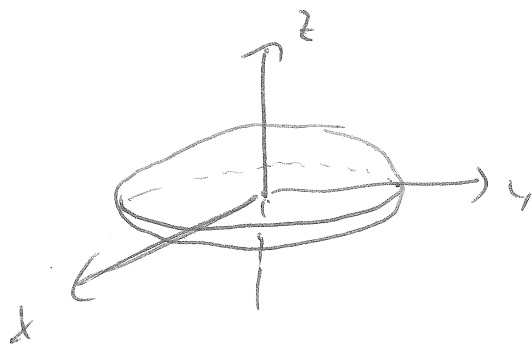
e si ottiene

$$= \int_{u=-\infty}^{\infty} \left(\int_{v=-\infty}^{\infty} g(u,v) dv \right) du$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(u,v) du dv$$

9/13

D (1) Se è una sfera schiacciata nell'asse z



(2)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} A \cos \varphi \cos \theta \\ A \cos \varphi \sin \theta \\ B \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \sin \varphi \cos \theta \\ -A \sin \varphi \sin \theta \\ -B \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} A \cos \varphi \cos \theta \\ A \cos \varphi \sin \theta \\ B \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A \cos \varphi \sin \theta \\ +A \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= A \cos \varphi \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

10/13

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} A \cos \varphi \cos \theta \\ A \cos \varphi \sin \theta \\ B \cos \varphi \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} A \sin \varphi \cos \theta \\ A \sin \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= A \sin \varphi \begin{pmatrix} B \sin \varphi \cos \theta \\ B \sin \varphi \sin \theta \\ A \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\left| A \sin \varphi \begin{pmatrix} B \sin \varphi \cos \theta \\ B \sin \varphi \sin \theta \\ A \cos \varphi \end{pmatrix} \right|$$

$$= A \sin \varphi \sqrt{B^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + B^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + A^2 \cos^2 \varphi}$$

$$= A \sin \varphi \sqrt{B^2 \sin^2 \varphi + A^2 \cos^2 \varphi}$$

$$dA = A \sin \varphi \sqrt{B^2 \sin^2 \varphi + A^2 \cos^2 \varphi} d\varphi d\theta$$

$$(3) \text{ area}(S) = \iint_S I \cdot dA$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi} A \sin \varphi \sqrt{B^2 \sin^2 \varphi + A^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \right) d\theta$$

11/13

$$= 2\pi A \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin \varphi \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + A^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$\begin{aligned} t &= \cos \varphi \\ dt &= -\sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$= 2\pi A \int_{t=-1}^{-1} \sqrt{b^2(1-t^2) + A^2 t^2} (-dt)$$

$$= 2\pi A \int_{t=-1}^{+1} \sqrt{b^2 + (A^2 - b^2)t^2} dt$$

$$= 2\pi AB \int_{t=-1}^{+1} \sqrt{1 + \frac{A^2 - b^2}{b^2} t^2} dt$$

$$\frac{A^2 - b^2}{b^2} t^2 = \tan^2 u$$

$$t^2 = \frac{b^2}{A^2 - b^2} \tan^2 u$$

$$t = \frac{b}{\sqrt{A^2 - b^2}} \tan u$$

$$dt = \frac{b}{\sqrt{A^2 - b^2}} \sec^2 u du$$

12 / 13

$$t = \pm 1 \Leftrightarrow \tanh u = \pm \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow u &= \pm \operatorname{arctanh}(\sqrt{A^2 - B^2} / B) \\ &= \pm u_0 \end{aligned}$$

$$\tanh u_0 = \sqrt{A^2 - B^2} / B$$

$$\begin{aligned} \sec u_0 &= \sqrt{1 + \tanh^2 u_0} = \sqrt{1 + \frac{A^2 - B^2}{B^2}} \\ &= \sqrt{\frac{A^2}{B^2}} = \frac{A}{B} \end{aligned}$$

$$= 2\pi AB \int_{u=-u_0}^{u_0} \sqrt{1 + \tanh^2 u} \frac{B}{\sqrt{A^2 - B^2}} \sec^3 u \, du$$

$$= \frac{2\pi A B^2}{\sqrt{A^2 - B^2}} \int_{u=-u_0}^{u_0} \sec^3 u \, du$$

13/13

$$= \frac{4\pi A b^2}{\sqrt{A^2 - b^2}} \int_{u=0}^{u_0} \sec^3 u \, du$$

$$= \frac{4\pi A b^2}{\sqrt{A^2 - b^2}} \left(\frac{1}{2} \tan u \sec u + \frac{1}{2} \log(\tan u + \sec u) \right) \Big|_{u=0}^{u_0}$$

$$= \frac{2\pi A b^2}{\sqrt{A^2 - b^2}} (\tan u_0 \sec u_0 + \log(\tan u_0 + \sec u_0))$$

$$= \frac{2\pi A b^2}{\sqrt{A^2 - b^2}} \left(\frac{\sqrt{A^2 - b^2}}{b}, \frac{A}{b} + \log \left(\frac{\sqrt{A^2 - b^2}}{b} + \frac{A}{b} \right) \right)$$

$$= \left(2\pi A^2 + \frac{2\pi A b^2}{\sqrt{A^2 - b^2}} \log \left(\frac{\sqrt{A^2 - b^2} + A}{b} \right) \right)$$