

DA FOTOCOPIARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 13 febbraio 2023

Regolamento:

- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggregati capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \phi \cos \theta \quad y = r \sin \phi \sin \theta \quad z = r \cos \phi$$
$$dV = dx dy dz = r^2 \sin \phi dr d\phi d\theta$$

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A. Siano $f(t)$ e $g(t)$ due funzioni che tendono rapidamente a zero per $t \rightarrow \pm\infty$. Sia

$$h(t) = \int_{s=-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s) ds$$

nota la *convoluzione* di f e g .

1. Scrivere la formula per $\hat{h}(\omega)$ come un integrale doppio.
2. Scambiare l'ordine d'integrazione e usare la sostituzione $t = u + s$ per ottenere la formula per $\hat{h}(\omega)$ in termini di $\hat{f}(\omega)$ e $\hat{g}(\omega)$.

B. Trovare il massimo di $-p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - p_3 \log p_3 - p_4 \log p_4$ sotto il vincolo:

$$p_1, p_2, p_3, p_4 > 0$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

C. Siano A , B , e C valori fissi, non nulli. Poniamo che i variabili x , y e z sono legati in modo che, variando (x, y, z) da un certo punto base (x_0, y_0, z_0) , vale

$$A(\Delta x) + B(\Delta y) + C(\Delta z) \approx 0$$

1. Trattando z come $z(x, y)$, calcolare $\partial z / \partial x$ al punto (x_0, y_0) .
2. Trattando x come $x(y, z)$, calcolare $\partial x / \partial y$ al punto (y_0, z_0) .
3. Trattando y come $y(z, x)$, calcolare $\partial y / \partial z$ al punto (z_0, x_0) .
4. Calcolare il prodotto di queste tre derivate parziali.

D. Sia $Q > 0$ un parametro fisso. Si consideri la superficie sferica con raggio Q e centro sull'asse- z al punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}$.

1. Nelle coordinate sferiche, r , ϕ e θ , trovare l'equazione soddisfatta dai punti della superficie sferica.
2. Risolvere quell'equazione per r in termini di ϕ e θ .
3. Calcolare l'elemento di superficie dS sulla superficie sferica usando i parametri ϕ e θ .
4. Calcolare l'area della superficie sferica come l'integrale di dS .

1/9

$$\boxed{A} \textcircled{1} \hat{h}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int_{s=-\infty}^{\infty} f(s) g(t-s) ds \right) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int_{s=-\infty}^{\infty} f(s) g(t-s) e^{-i\omega t} ds \right) dt$$

$$\textcircled{2} = \int_{s=-\infty}^{\infty} \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} f(s) g(t-s) e^{-i\omega t} dt \right) ds$$

$$\begin{aligned} t &= u+s \\ dt &= du \end{aligned}$$

$$= \int_{s=-\infty}^{\infty} \left(\int_{u=-\infty}^{\infty} f(s) g(u) e^{-i\omega(u+s)} du \right) ds$$

$$= \int_{s=-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} \left(\int_{u=-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du \right) ds$$

2/9

$$= \int_{s=-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} \hat{g}(\omega) ds$$

$$= \left(\int_{s=-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\omega s} ds \right) \hat{g}(\omega)$$

$$= \boxed{\hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)}$$

$$\boxed{B} \quad \nabla (-p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - p_3 \log p_3 - p_4 \log p_4)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 - \log p_1 \\ -1 - \log p_2 \\ -1 - \log p_3 \\ -1 - \log p_4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 - \log p_1 \\ -1 - \log p_2 \\ -1 - \log p_3 \\ -1 - \log p_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3/9

$$\hookrightarrow \log p_1 = \log p_2 = \log p_3 = \log p_4 = 1 - \lambda$$

$$\hookrightarrow p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = e^{1-\lambda}$$

In quanto $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$

e $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$, deve essere

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1/4$$

$$-p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - p_3 \log p_3 - p_4 \log p_4$$

$$= 4 \left(-\frac{1}{4} \log \left(\frac{1}{4} \right) \right) = -\log \left(\frac{1}{4} \right) = \boxed{\log(4)}$$

Adesso consideriamo la possibilità che il vero massimo si trova verso la frontiera, ad esempio per $p_4 \rightarrow 0$.

$$\lim_{p_4 \rightarrow 0} -p_4 \log p_4 = 0, \text{ quindi il}$$

problema sarebbe di massimizzare

$$-p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - p_3 \log p_3$$

4/9

sotto il vincolo $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Per questo problema, il massimo viene $\log 3$ e $\log 3 < \log 4$. Perciò, $\log 4$ è il vero massimo.

□ (1) $\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ si calcola con $\Delta y = 0$, quindi

$$A(\Delta x) + C(\Delta z) \approx 0$$

$$\hookrightarrow \Delta z \approx -\frac{A}{C} \Delta x$$

$$\hookrightarrow \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \boxed{-\frac{A}{C}}$$

$$(2) \quad \frac{\partial x(y,z)}{\partial y} = \boxed{\frac{-B}{A}}$$

$$(3) \quad \frac{\partial x(z,x)}{\partial z} = \boxed{\frac{-C}{B}}$$

5/9

$$(4) \left(\frac{-A}{C}\right) \cdot \left(\frac{-B}{A}\right) \cdot \left(\frac{-C}{B}\right) = \boxed{-1}$$

cioè $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$

D ①

$$Q = \text{disc} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \end{pmatrix} \right)$$

$$= \left((x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-Q)^2 \right)^{1/2}$$

$$\hookrightarrow Q^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2Qz + Q^2$$

$$\hookrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2Qz$$

$$\hookrightarrow \boxed{r^2 = 2Q r \cos \varphi}$$

$$(2) \hookrightarrow \boxed{r = 2Q \cos \varphi}$$

6/9

$$\begin{pmatrix} x(\varphi, \theta) \\ y(\varphi, \theta) \\ z(\varphi, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \cos \theta \\ R \sin \varphi \cos \theta \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2a \cos \varphi \cos \theta \\ 2a \sin \varphi \cos \theta \\ 2a \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \theta \\ 2a (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin \theta \\ -4a \sin \varphi \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \\ 2a \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \times \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2a (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \theta \\ 2a (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin \theta \\ -4a \sin \varphi \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2a \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \\ 2a \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

7/9

$$= 4 Q^3 \sin \varphi \cos \varphi \begin{pmatrix} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \theta \\ (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin \theta \\ -2 \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 4 Q^3 \sin \varphi \cos \varphi \begin{pmatrix} 2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \\ 2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta \\ \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \theta} \right|$$

$$= 4 Q^3 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\cdot \left(4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)^2 \right)^{1/2}$$

$$= 4 Q^3 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\cdot \left(4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi - 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi \right)^{1/2}$$

$$= 4 Q^3 \sin \varphi \cos \varphi$$

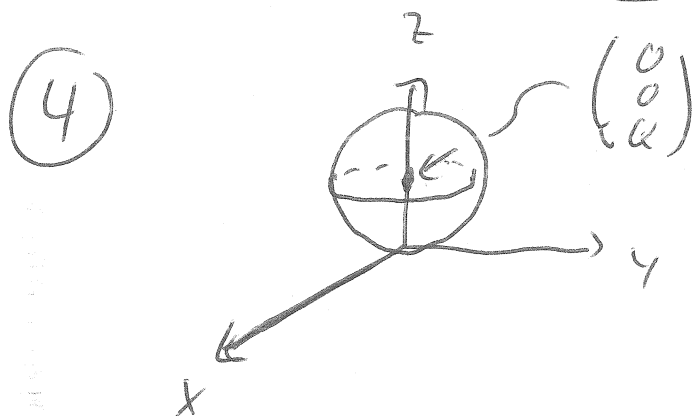
$$\cdot (\cos^4 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi)^{1/2}$$

(8/9)

$$= 4a^2 \sin\varphi \cos\varphi \left((\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 \right)^{1/2}$$

$$= 4a^2 \sin\varphi \cos\varphi (1)^{1/2} = 4a^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

$$dS = 4a^2 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta$$



Da questa figura si trovano i limiti $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (poiché la superficie è tutta sopra il piano (x, y) e tangente a quel piano) e $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (poiché la superficie fa un giro completo intorno all'asse z).

9/9

$$\text{area} = \iint_{\text{surface}} 1 \, dS$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{\pi/2} 1 \cdot 4Q^2 \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \right) d\theta$$

$$= 4Q^2 \cdot 2\pi \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi$$

$$= 4Q^2 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_{\varphi=0}^{\pi/2}$$

$$= 4Q^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \boxed{4\pi Q^2}$$