

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 29 settembre 2022

Regolamento:

- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggregati capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

A. Sia r un parametro fisso, $0 < r < 1$.

1. Usare la formula per la serie geometriche e calcolare una formula chiusa (senza somme infinite) per

$$1 + re^{it} + r^2 e^{2it} + r^3 e^{3it} + r^4 e^{4it} + \dots$$

2. Sulla base dell'esito precedente, calcolare una formula chiusa per

$$\dots + r^4 e^{-4it} + r^3 e^{-3it} + r^2 e^{-2it} + re^{-it} + 1$$

3. Sulla base dei due esiti precedenti, calcolare una formula chiusa per

$$f(t) = \dots + r^4 e^{-4it} + r^3 e^{-3it} + r^2 e^{-2it} + re^{-it} + 1 + re^{it} + r^2 e^{2it} + r^3 e^{3it} + r^4 e^{4it} + \dots$$

4. Calcolare $\int_0^{2\pi} f(t) dt$. (Conviene usare l'espressione di $f(t)$ come somma di Fourier, non la formula chiusa.)

B. Usare i moltiplicatori di Lagrange e calcolare il massimo (o l'estremo superiore) e il minimo (o l'estremo inferiore) di $xy + yz + zx$ sotto i vincoli $x + y + z = 6$, $x, y, z \geq 0$.

C.

1. Calcolare

$$\frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y \partial z} (x + y + z)^5$$

2. Sulla base dell'esito precedente, calcolare il coefficiente di $x^3 y z$ nell'espansione di $(x + y + z)^5$.

D. Siano D , E , e F costanti fisse, e sia C la curva parametrizzata come

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dt^2 \\ Et^2 \\ Ft^2 \end{pmatrix} \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1$$

Calcolare la lunghezza di C , cioè $\int_C 1 d\ell$.

$$1/9$$

A ① $1 + M e^{it} + M^2 e^{2it} + \dots$

$$= 1 + (M e^{it}) + (M e^{it})^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - M e^{it}}$$

② Si mette $-t$ al posto di t nel calcolo precedente.

Risposta: $\frac{1}{1 - M e^{-it}}$

③ $f(t)$

$$= \dots + M^3 e^{-3it} + M^2 e^{-2it} + M e^{-it} + 1$$

$$+ \dots + M^3 e^{3it} + M^2 e^{2it} + M e^{it} + 1$$

$$\sim 1$$

$$= \frac{1}{1 - M e^{-it}} + \frac{1}{1 - M e^{it}} - 1$$

2/9

$$= \frac{(1 - me^{it}) + (1 - me^{-it})}{(1 - me^{-it})(1 - me^{it})} - 1$$

$$= \frac{2 - m(e^{it} + e^{-it})}{1 - m(e^{it} + e^{-it}) + m^2} - 1$$

$$= \frac{2 - m(e^{it} + e^{-it}) - (1 - m(e^{it} + e^{-it}) + m^2)}{1 - m(e^{it} + e^{-it}) + m^2}$$

$$= \frac{1 - m^2}{1 - 2m \cos t + m^2}$$

④ La somma infinita per $f(t)$ è una serie di Fourier con $a_0 = 1$.

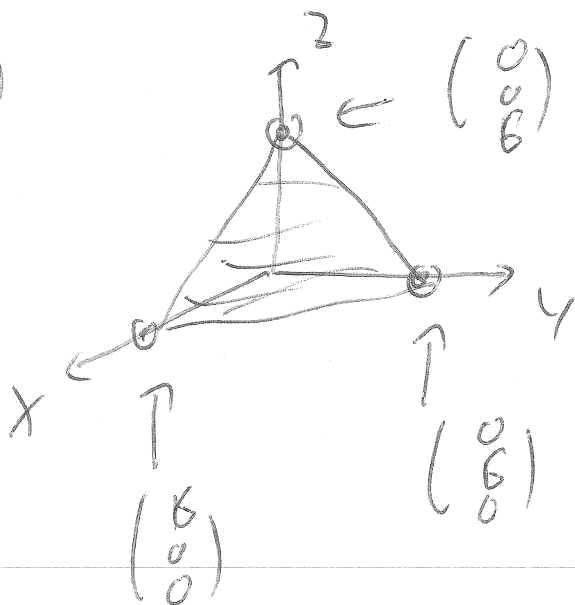
(3/9)

$$1 = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i \cdot 0 \cdot t} dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt,$$

onde

$$(2\pi) = \int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1-m^2}{1-2m \cos t + m^2} dt$$

(B)



Il triangolo è il luogo
dei punti con $x, y, z \geq 0$
e $x+y+z=6$.

(4/9)

Caso 1: punti all'interno
del triangolo

$$\begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} = \nabla(xy+yz+zx) \\ = \lambda \nabla(x+y+z) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y+z = \lambda \\ x+z = \lambda \\ x+y = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = \lambda - \lambda = (y+z) - (x+z) \\ \quad \quad \quad = y - x \\ 0 = \lambda - \lambda = (x+z) - (x+y) \\ \quad \quad \quad = z - y \end{cases}$$

$$\leadsto x = y = z$$

In quanto $x+y+z=6$, vale

$$x=y=z=2, \quad xy+yz+zx = \boxed{12}$$

Caso 2: punti all'interno
di un lato, diciamo
il lato con $z=0$

5/9

$$xy + yz + zx = xy + 0 + 0 = xy$$

$$x + y + z = x + y + 0 = x + y$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \nabla(xy) = \lambda \nabla(x+y) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = \lambda \\ x = \lambda \end{cases} \rightarrow x = y$$

e con $x+y=6$, vale $x=y=3$

$$\text{e } xy + yz + zx = xy = \textcircled{9}$$

Caso 3: i vertici, diciamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$xy + yz + zx = 0 + 0 + 0 = \textcircled{0}$$

Esiti: Massimo = 12 per $x=y=z=2$
Minimo = 0 ai 3 vertici

6/9

$$\boxed{C} \quad ① \quad \frac{\partial}{\partial z} (x+y+z)^5 = 5(x+y+z)^4$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (x+y+z)^5 &= \frac{\partial}{\partial y} 5(x+y+z)^4 \\ &= 20(x+y+z)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} (x+y+z)^5 &= \frac{\partial}{\partial x} 20(x+y+z)^3 \\ &= 60(x+y+z)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y \partial z} (x+y+z)^5 = 120(x+y+z)$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y \partial z} (x+y+z)^5 = \boxed{120}$$

② Serie di Taylor

$$(x+y+z)^5 = \sum_{j,k,l} \left(\frac{1}{j!k!l!} \frac{\partial^{j+k+l}}{\partial x^j \partial y^k \partial z^l} (x+y+z)^5 \cdot x^j y^k z^l \right)$$

7/9

Il termine con $x^3 y z$
corrisponde a $j=3, k=l=1$ e
vale

$$\frac{1}{3!1!1!} \cdot 120 \cdot x^3 y z = 20 x^3 y z$$

Il coefficiente desiderato è 20,

oppure

$$(x+y+z)^5 = c x^3 y z + (\text{altri termini})$$

con $x^j y^k z^l$,
 $j+k+l=5$

Quando si applica $\partial^5 / \partial x^3 \partial y \partial z$
agli altri termini, si ottiene
0. Esempio:

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 y^2 z) = 2 x y^2 z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 y^2 z) = 2 y^2 z$$

(8/9)

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} (x^2 y^2 z) = 0, \text{ quindi}$$

$$\frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y \partial z} (x^2 y^2 z) = 0.$$

$$120 = \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y \partial z} \cancel{(x+y+z)^5} (x+y+z)^5$$

$$= \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y \partial z} (c x^3 y z)$$

$$+ \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y \partial z} (\text{altri termini})$$

$$= 6c + 0 = 6c \rightarrow c = 20$$

[D]

$$d\ell = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \sqrt{(20t)^2 + (2Et)^2 + (Ft)^2} dt$$

9/9

$$= \sqrt{4t^2(D^2 + E^2 + F^2)} dt$$

$$= 2t \sqrt{D^2 + E^2 + F^2} dt$$

$$\int_C 1 \cdot d\ell = \int_{t=0}^1 1 \cdot 2t \sqrt{D^2 + E^2 + F^2} dt$$

$$= \left[\sqrt{D^2 + E^2 + F^2} \cdot t^2 \right]_{t=0}^1 = \sqrt{D^2 + E^2 + F^2}$$

Effettivamente, la curva C non è altro che il segmento da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a

$\begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix}$, la cui lunghezza è $\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}$.

