

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 13 settembre 2022

Regolamento:

- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Se $f(t)$ è periodico con periodo R allora

$$f(t) = \sum_j a_j e^{2\pi i j t / R} \quad \text{con} \quad a_j = \frac{1}{R} \int_{-R/2}^{R/2} f(t) e^{-2\pi i j t / R} dt$$

A. Trovare la serie di Fourier per $\sin^3(t)$:

$$\sin^3(t) = \sum_j a_j e^{ijt}$$

(Indicazione: la somma ha esattamente 4 termini non nulli.)

Poi calcolare ambedue i lati dell'identità:

$$\int_0^{2\pi} |\sin^3(t)|^2 dt = 2\pi \sum_j |a_j|^2$$

e verificare che coincidono.

B. Usare i moltiplicatori di Lagrange e calcolare il massimo (o l'estremo superiore) e il minimo (o l'estremo inferiore) di $4x^2 + 12xy + 9y^2$ sotto i vincoli $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \geq 0$.

C. Sia $f(x)$ una qualsiasi funzione che possiede derivate di ogni ordine. Calcolare la serie di Taylor della funzione $f(xy)$ in termini delle derivate $d^j f(t)/dt^j|_{t=0}$ in due modi diversi:

1. secondo la formula con le derivate parziali e
2. usando la serie di Taylor per $f(t)$.

D. Calcolare l'integrale

$$\iint_{x,y \geq 0} (x+y)^2 e^{-x-y} dA$$

(Evidentemente la zona d'integrazione è il primo quadrante.)

1/12

A ~~1/12~~ $\text{sen}(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

$$\text{sen}^3(t) = \frac{(e^{it})^3 - 3(e^{it})^2 e^{-it} + 3e^{it}(e^{-it})^2 - (e^{-it})^3}{(2i)^3}$$

$$= \frac{e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}}{-8i}$$

$$= \left(\frac{i}{8} e^{3it} - \frac{3i}{8} e^{it} + \frac{3i}{8} e^{-it} - \frac{i}{8} e^{-3it} \right)$$

$$a_3 = \frac{i}{8}, a_1 = -\frac{3i}{8}, a_{-1} = \frac{3i}{8}, a_{-3} = -\frac{i}{8}$$

e tutti gli altri a_i si annullano.

2/12

$$2\pi \sum_j |a_j|^2 = 2\pi \left(\left| \frac{i}{8} \right|^2 + \left| \frac{-3i}{8} \right|^2 + \left| \frac{3i}{8} \right|^2 + \left| \frac{-i}{8} \right|^2 \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{1}{64} \right) = 2\pi \left(\frac{20}{64} \right)$$

$$= \left(\frac{5\pi}{8} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} |\cos^3 t|^2 dt = \int_0^{2\pi} \cos^6 t dt$$

$$= -\frac{1}{6} \cos t \cos^5 t \Big|_{t=0}^{2\pi} + \frac{5}{6} \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt$$

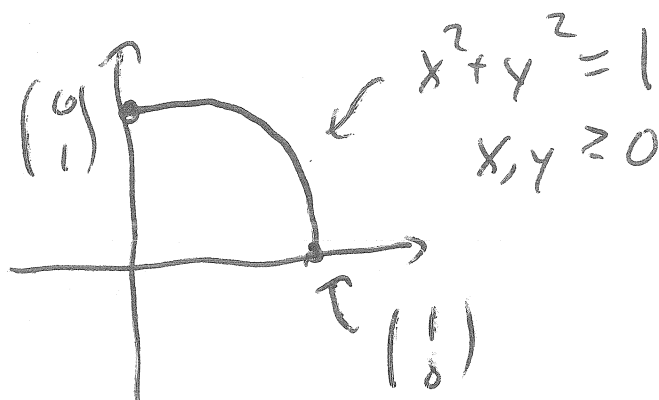
$$= \frac{5}{6} \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 dt = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi$$

$$= \left(\frac{5\pi}{8} \right)$$

3/12

[B]



$$\text{Per } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 4$$

$$\text{Per } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 9$$

Per usiamo Lagrange

$$\nabla (4x^2 + 12xy + 9y^2) = \lambda \nabla (x^2 + y^2)$$

$$\begin{pmatrix} 8x + 12y \\ 12x + 18y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

~~$12x + 18y$~~

(4/12)

$$\hookrightarrow (4x+6y) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_2 = \frac{4x+6y}{2\lambda}$$

$$1 = x^2 + y^2 = (2\lambda_2)^2 + (3\lambda_2)^2 = 13\lambda_2^2$$

$$\hookrightarrow \lambda_2 = \pm 1/\sqrt{13}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

Si esclude il segno "-" poiché
c'è il vincolo $x, y \geq 0$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow 4x^2 + 12xy + 9y^2 = 4\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + 12\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 9\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2$$

5/12

$$= \frac{1}{13} (16 + 72 + 81) = \frac{1}{13} (169) = 13$$

$$\text{Minimo} = \min(4, 9, 13) = 4$$

$$\text{Massimo} = \max(4, 9, 13) = 13$$

$$\boxed{c} \quad (1) \quad \frac{\partial f(xy)}{\partial x} = y \frac{df}{dt} \Big|_{t=xy}$$

$$\frac{\partial f(xy)}{\partial y} = x \frac{df}{dt} \Big|_{t=xy}$$

$$\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x^2} = y^2 \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=xy}$$

$$\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x \partial y} = \frac{df}{dt} \Big|_{t=xy} + xy \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=xy}$$

(6/12)

$$\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial y^2} = x^2 \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=xy}$$

Quando si valutano queste derivate per $x=y=0$, tutti sono zero tranne

$$\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x \partial y} \Big|_{x=y=0} = \frac{df}{dt} \Big|_{t=0}$$

Perciò i primi due termini della serie di Taylor sono

$$\frac{f(0)}{0!0!} + \frac{(df/dt)|_{t=0}}{1!1!} \cdot x'y'$$

$$= f(0) + \frac{df}{dt} \Big|_{t=0} xy$$

7/12

Dal calcolo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{df}{dt} \Big|_{t=xy} \right) \\ &= \frac{df}{dt} \Big|_{t=xy} + xy \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=xy}\end{aligned}$$

si capisce che $\partial/\partial y$ ha l'effetto di togliere un fattore di y oppure aggiungere un fattore di x . Analogamente

$\partial/\partial x$ ha l'effetto di togliere un fattore di x o aggiungere un fattore di y .

8/12

Quando si valuta per $x=y=0$,
ogni termine che contiene un
fattore di x o un fattore
di y si annulla. Quindi,
per termini non nulli, il
numero di applicazioni di
 $\partial/\partial x$ deve essere uguale al
numero di applicazioni di
 $\partial/\partial y$.

$$\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial^2 x \partial^2 y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(y^2 \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=xy} \right)$$

$$= 2 \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=xy} + 2xy \frac{d^3 f}{dt^3} \Big|_{t=xy} \\ + x^2 y^2 \frac{d^4 f}{dt^4} \Big|_{t=xy}$$

9/12

Valutato per $x=y=0$ questo è

$$2 \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=0}$$

e perciò il terzo termine
della serie di Taylor è

$$\frac{1}{2! 2!} \left(2 \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=0} \right) x^2 y^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=0} x^2 y^2$$

Per andare oltre:

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^n \partial y^n} (f(xy)) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(xy) \right)$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(y^n \frac{d^n f}{dt^n} \Big|_{t=xy} \right) = n! \frac{d^n f}{dt^n} \Big|_{t=xy}$$

+ (termini con
fattori di xy)

(10/12)

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^n \partial y^n} (f(xy)) \Big|_{x=y=0} = n! \frac{d^n f}{dt^n} \Big|_{t=0}$$

serie di Taylor per $f(xy)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! n!} \left(n! \frac{d^n f}{dt^n} \Big|_{t=0} \right) x^n y^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dt^n} \Big|_{t=0} x^n y^n$$

$$(2) \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dt^n} \Big|_{t=0} t^n$$

Si sostituisce $t=xy$:

$$f(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dt^n} \Big|_{t=0} (xy)^n$$

11/12



$$\iint_{x,y \geq 0} (x+y)^2 e^{-x-y} dA$$

$x, y \geq 0$

$$= \int_{x=0}^{\infty} \left(\int_{y=0}^{\infty} (x^2 + 2xy + y^2) e^{-x} e^{-y} dy \right) dx$$

$$\int_{y=0}^{\infty} e^{-y} dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-e^{-y} \right]_{y=0}^R = 1$$

$$\int_{y=0}^{\infty} y e^{-y} dy =$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-y e^{-y} \right]_{y=0}^R + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{y=0}^R e^{-y} dy$$

$$= 0 + 1 = 1$$

(12/12)

$$\int_{y=0}^{\infty} y^2 e^{-y} dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} -y^2 e^{-y} \Big|_{y=0}^R$$

$$+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{y=0}^R 2y \cdot e^{-y} dy$$

$$= 0 + 2 = 2$$



$$= \int_{x=0}^{\infty} (x^2 e^{-x} \cdot 1 + 2x e^{-x} \cdot 1 + e^{-x} \cdot 2) dx$$

$$= \int_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} + 2e^{-x} dx$$

$$= 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = (6)$$