

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 9 settembre 2024

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad dx dy = r dr d\theta$$

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A. Prendiamo come noto che la trasformata di Fourier di

$$f(t) = e^{-t^2/2} \quad \text{è} \quad \hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}$$

In particolare

$$\int e^{-s^2/2} ds = \sqrt{2\pi}$$

1. La convoluzione di $f(t)$ e $g(t)$, scritta $(f * g)(t)$ è definita da

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s) ds$$

Calcolare $(f * f)(t)$.

2. Calcolare $\widehat{(f * f)}(\omega)$.

3. Verificare che $\widehat{(f * f)} = \hat{f} \cdot \hat{f}$. (Vale in generale che $\widehat{(f * g)} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.)

B. Siano $y_1 = y_1(x_1, x_2)$ e $y_2 = y_2(x_1, x_2)$. Poniamo che

$$y_1 \Big|_{\substack{x_1=200 \\ x_2=300}} = 7 \quad y_2 \Big|_{\substack{x_1=200 \\ x_2=300}} = 11 \quad \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \Big|_{\substack{x_1=200 \\ x_2=300}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Sulla base della definizione della derivata, calcolare approssimazioni a $y_1(201, 302)$ e a $y_2(201, 302)$.
2. Con lo stesso modo di approssimazione, trovare (x_1, x_2) tale che $y_1(x_1, x_2) \approx 0$ e $y_2(x_1, x_2) \approx 0$.

C. Sia

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(p, \theta) \\ y(p, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^p + e^{-p}) \cos \theta \\ (e^p - e^{-p}) \sin \theta \end{pmatrix}$$

1. Fissando il valore $p = P$ e lasciando variare θ , il punto $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ percorre una curva. Descrive e schizza quella curva.
2. Esprimere $dA = dx dy$ in termini di $dp d\theta$.
3. Calcolare l'integrale di dA per $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq p \leq P$.
4. L'ultimo esito è l'area di una certa figura geometrica. Quale figura è? A prescindere del calcolo precedente, si può calcolare la sua area. Verificare che l'esito precedente è corretto.

D. Al punto critico di questo esercizio, conviene usare l'identità

$$\cos(\theta - \pi/4) = \cos(\pi/4) \cos \theta + \sin(\pi/4) \sin \theta$$

Si consideri il triangolo $\mathcal{T}$ con vertici $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Fare uno schizzo di $\mathcal{T}$. [facilissimo]
2. Calcolare l'area di $\mathcal{T}$ usando le coordinate rettangolari, x e y . [facile]
3. Calcolare l'area di $\mathcal{T}$ usando le coordinate polari, r e θ . [più interessante]

1/12

$$\boxed{A} \quad (1) (f * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) f(s) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-s)^2/2} e^{-s^2/2} ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-t^2 + 2ts - s^2)/2} e^{-s^2/2} ds$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} e^{ts} e^{-s^2/2 - s^2/2} ds$$

$$= e^{-t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 + ts} ds$$

$$= e^{-t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+t/2)^2 + t^2/4} ds$$

$$= e^{-t^2/2} e^{t^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+t/2)^2} ds$$

$$\boxed{s+t/2 = u, ds = du} = e^{-t^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$2/12$$

$$u = v/\sqrt{2}, \quad du = dv/\sqrt{2}$$

$$= e^{-t^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2} \frac{1}{\sqrt{2}} dv$$

$$= e^{-t^2/4} \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi} e^{-t^2/4}$$

$$(2) \quad (\widehat{f * f})(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\pi} e^{-t^2/4} e^{-i\omega t} dt$$

$$t = \sqrt{2} w, \quad dt = \sqrt{2} dw$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\pi} e^{-2w^2/4} e^{-i\omega \sqrt{2} w} \sqrt{2} dw$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2/2} e^{-i(\sqrt{2}\omega)w} dw$$

$$= \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\sqrt{2}\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-(\sqrt{2}\omega)^2/2}$$

$$\sqrt{2\pi} \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2} = 2\pi e^{-\omega^2}$$

$$\boxed{3/12}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad \hat{f} \cdot \hat{f} &= (\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}) (\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2}) \\ &= 2\pi e^{-\omega^2/2 - \omega^2/2} = \boxed{2\pi e^{-\omega^2}} \\ &= \widehat{(f * f)}(\omega) \end{aligned}$$

B

$$\textcircled{1} \quad \Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \approx \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x_1=201 \\ x_2=302}} \approx \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x_1=200 \\ x_2=300}} + \Delta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}}$$

4/12

② Vogliamo che $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \bigg|_{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

quindi vogliamo che $\Delta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -11 \end{pmatrix} \approx \Delta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \approx \frac{\partial (y_1, y_2)}{\partial (x_1, x_2)} \bigg|_{\substack{x_1=200 \\ x_2=300}} \cdot \Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\Delta x_1 - 2 \Delta x_2 = -7$$

$$3 \Delta x_1 - 4 \Delta x_2 = -11,$$

un sistema lineare.

$$\begin{aligned} -2(\Delta x_1 - 2 \Delta x_2) &= -2(-7) \\ + (3 \Delta x_1 - 4 \Delta x_2) &= +(-11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= 14 - 11 = 3 \\ \Delta x_2 &= (-7 - \Delta x_1) / (-2) = -10 / -2 = 5 \end{aligned}$$

5/12

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

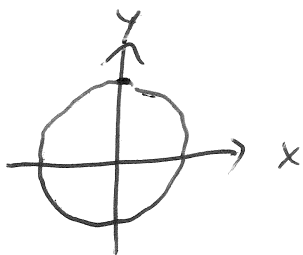
$$= \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 203 \\ 305 \end{pmatrix}$$

C ①

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e^p + e^{-p}) \cos \theta \\ (e^p - e^{-p}) \sin \theta \end{pmatrix}$$

Si sa che $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ percorre

la circonferenza di raggio 1:

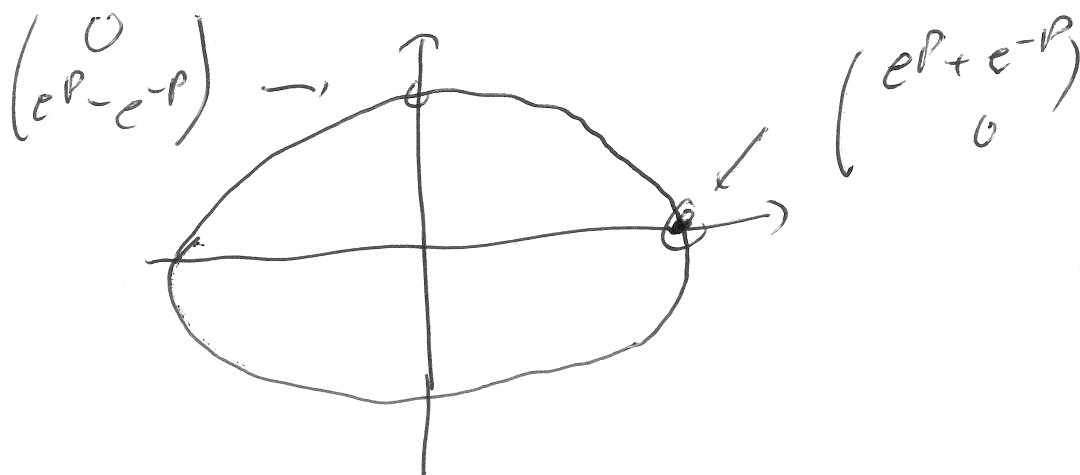


I fattori di $e^p + e^{-p}$ e $e^p - e^{-p}$ dilungano ~~l'asse~~ lungo l'asse- x e l'asse- y rispettivamente,

6/12

ma con due fattori diversi.

Perciò, la nuova curva è
un'ellisse con ~~"semi-asse"~~
"semi-maggi" $e^p + e^{-p}$ e $e^p - e^{-p}$



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(p, \theta)} &= \begin{pmatrix} \partial x / \partial p & \partial y / \partial p \\ \partial x / \partial \theta & \partial y / \partial \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (e^p - e^{-p}) \cos \theta & (e^p + e^{-p}) \sin \theta \\ -(e^p + e^{-p}) \sin \theta & (e^p - e^{-p}) \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7/12

$$dA = dx dy = \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(p,\theta)} \right| dp d\theta$$

$$= \left((e^p - e^{-p})^2 \cos^2 \theta + (e^p + e^{-p})^2 \sin^2 \theta \right) dp d\theta$$

③ Si ricordi che

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$$

$$\int_{p=0}^P \left(\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left((e^p - e^{-p})^2 \cos^2 \theta + (e^p + e^{-p})^2 \sin^2 \theta \right) d\theta \right) dp$$

$$= \int_{p=0}^P (e^p - e^{-p})^2 \pi + (e^p + e^{-p})^2 \pi dp$$

$$= \pi \int_{p=0}^P (e^{2p} - 2e^{p-p} + e^{-2p}) + (e^{2p} + 2e^{p-p} + e^{-2p}) dp$$

8/12

$$= \pi \int_{p=0}^P 2e^{2p} + 2e^{-2p} - 2 + 2 \, dp$$

$$= 2\pi \int_{p=0}^P e^{2p} + e^{-2p} \, dp$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} e^{2p} - \frac{1}{2} e^{-2p} \right) \Big|_{p=0}^P$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} (e^{2P} - 1 - e^{-2P} + 1)$$

$$= \pi (e^{2P} - e^{-2P})$$

④ L'area calcolata è quella dell'ellisse di parte (1).

L'area del disco di raggio 1

è $\pi \cdot 1^2 = \pi$. L'ellisse è

ottenuta allungando lungo

le due assi con fattori

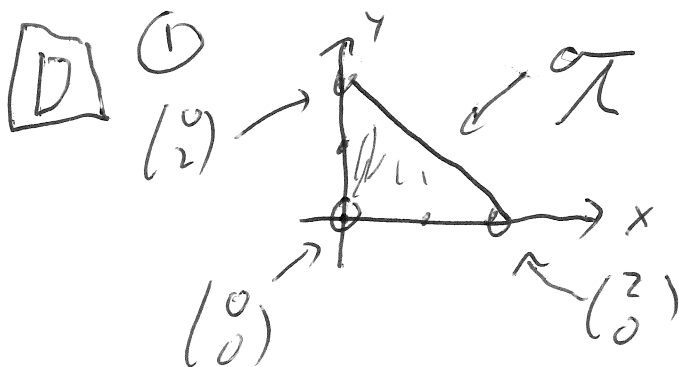
$e^P + e^{-P}$ e $e^P - e^{-P}$, perciò

(9/12)

la sua area è

$$\begin{aligned} & \pi (e^p + e^{-p})(e^p - e^{-p}) \\ &= \pi ((e^p)^2 - (e^{-p})^2) \\ &= \pi (e^{2p} - e^{-2p}), \end{aligned}$$

come calcolato in parte (3).



l'area è

$$\frac{\text{BASE} \cdot \text{ALTEZZA}}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

② sull'ipotenusa vale $x + y = 2$
ossia $y = 2 - x$.

10/12

$$\text{area}(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} 1 \, dA$$

$$= \int_{x=0}^2 \left(\int_{y=0}^{2-x} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^2 (2-x) \, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^2$$

$$= 2 \cdot 2 - \frac{4}{2} = 4 - 2 = \boxed{2}$$

③ Still'ipotenusa

$$2 = x + y = r \cos \theta + r \sin \theta$$

$$\text{or via } r = \frac{2}{(\cos \theta + \sin \theta)}$$

$$\text{area}(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} 1 \, dA$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{\frac{2}{(\cos \theta + \sin \theta)}} 1 \cdot r \, dr \right) d\theta$$

$$\boxed{11/12}$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\cos\theta + \sin\theta} \right)^2 d\theta$$

$$= 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)^2} d\theta$$

by formula

$$\cos(\theta - \pi/4) = \cos \pi/4 \cos\theta + \sin \pi/4 \sin\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos\theta + \sin\theta),$$

$$\text{vale } \cos\theta + \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{2}} \cos(\theta - \pi/4)$$

$$= \sqrt{2} \cos(\theta - \pi/4).$$

$$\text{area}(\sim) = 2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{(\sqrt{2} \cos(\theta - \pi/4))^2} d\theta$$

$$\frac{12}{12}$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{2})^2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2(\theta - \frac{\pi}{4})} d\theta$$

$$\theta - \frac{\pi}{4} = \alpha, \quad d\theta = d\alpha$$

$$= \int_{\alpha=-\pi/4}^{+\pi/4} \frac{1}{\cos^2(\alpha)} d\alpha$$

$$= \int_{\alpha=-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2(\alpha) d\alpha$$

$$= \tan(\alpha) \Big|_{\alpha=-\pi/4}^{+\pi/4} = (1 - (-1))$$

$$= 2$$