

DA FOTOCOPIARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 28 febbraio 2022

Regolamento:

- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, e tutti gli aggregati capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A. Si consideri questa funzione:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{se } t \geq 0 \\ -e^t & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

1. Calcolare $\hat{f}(\omega)$.
2. Calcolare ambedue i lati dell'identità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

e verificare che sono uguali.

B. Usare i moltiplicatori di Lagrange e calcolare il massimo (o l'estremo superiore) e il minimo (o l'estremo inferiore) di $4x + 2y + z$ sotto il vincolo $z = x^2 + y^2$.

C. La serie di Taylor di $f(x, y) = e^{xy}$ ha la forma

$$e^{xy} = \sum_{j,k \geq 0} c_{j,k} x^j y^k$$

Usare le derivate parziali e calcolare i coefficienti $c_{j,k}$. (Conviene considerare separatamente i casi $j < k$, $j = k$, e $j > k$.) Poi scrivere la somma dei primi 5 termini non nulli della serie, e spiegare perché quella somma è la somma giusta.

D. Sia $\mathcal{Z}$ la zona nel piano determinato dalla condizione $|x| \leq y$. Siano l e m due parameteri fissi con $m > l > 0$.

1. Fare un disegno della zona $\mathcal{Z}$.
2. Calcolare

$$\iint_{\mathcal{Z}} e^{-lx-my} dA$$

1/10

A ①

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 -e^t e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{t(1-i\omega)} dt + \int_0^{\infty} e^{t(-1-i\omega)} dt$$

$$= \left. -\frac{1}{1-i\omega} e^{t(1-i\omega)} \right|_{t=-\infty}^0 + \left. \frac{1}{-1-i\omega} e^{t(-1-i\omega)} \right|_{t=0}^{\infty}$$

$$= \left(-\frac{1}{1-i\omega} e^0 + 0 \right) + \left(0 + \frac{1}{1+i\omega} e^0 \right)$$

$$= \frac{-1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{-2i\omega}{1+\omega^2}$$

2/10

$$(2) \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^0 |-e^t|^2 dt + \int_{t=0}^{+\infty} |e^{-t}|^2 dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^0 e^{2t} dt + \int_{t=0}^{+\infty} e^{-2t} dt$$

$$= \left. \frac{1}{2} e^{2t} \right|_{t=-\infty}^0 + \left. \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2t} \right|_{t=0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left| \frac{-2i\omega}{1+\omega^2} \right|^2 d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(1+\omega^2)^2} d\omega$$

3/10

$$\omega = \tan \theta \quad 1 + \omega^2 = 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$d\omega = \sec^2 \theta d\theta$$

$$\omega = -\infty \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \quad \omega = +\infty \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tan^2 \theta}{(\sec^2 \theta)^2} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta / \cos^2 \theta}{1 / \cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

4/10

[B] Il vincolo è $z - x^2 - y^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\nabla} (4x + 2y + z)$$

$$= \lambda \underline{\nabla} (z - x^2 - y^2) = \lambda \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 4 = \lambda(-2x) \\ 2 = \lambda(-2y) \\ 1 = \lambda \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 4 = -2x \\ 2 = -2y \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z = x^2 + y^2 = (-2)^2 + (-1)^2 = 5$$

Il valore di $4x + 2y + z$ a questo punto è

$$4(-2) + 2(-1) + 5 = -5$$

5/10

Non ci sono punti dove i gradienti non esistono.

Non ci sono punti dove $\nabla(z - x^2 - y^2) = \underline{0}$.

Non c'è nessuna frontiera.

Dobbiamo considerare il caso che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \infty$.

$z = x^2 + y^2$ è sempre positivo,

e se $|x|$ e/o $|y|$ è molto grande, allora

$$z \gg |x| \text{ e } z \gg |y|.$$

Perciò $4x + 2y + z \approx z$, molto grande e positivo. Esempio:

$$x = -100, y = 0, z = 10.000.$$

L'estremo superiore (o massimo)

di $4x + 2y + z$ vale $(+\infty)$.

Il minimo vale (-5) .

6/10

$$\boxed{c} \quad \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} (e^{xy}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^3 e^{xy})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy})$$

$$= 6x e^{xy} + 3x^2 y e^{xy} + 3x^2 y e^{xy} + x^3 y^2 e^{xy}$$

Questo vale 0 quando $x=y=0$.

In generale, se $j < k$

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k} (e^{xy}) = \frac{\partial^j}{\partial x^j} (x^k e^{xy})$$

sarà una somma di termini, ciascuno dei quali ha almeno un fattore di x (effettivamente, almeno $k-j$ fattori di x). Quindi, vale 0 quando $x=y=0$.

7/10

Un calcolo simile porterà all'esito 0 se $j > k$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} (e^{xy}) &= \frac{\partial^3}{\partial x^3} (x^3 e^{xy}) \\&= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (3x^2 e^{xy} + x^3 y e^{xy}) \\&= \frac{\partial}{\partial x} (6x e^{xy} + 3x^2 y e^{xy} + 3x^2 y e^{xy} + x^3 y^2 e^{xy}) \\&= 6e^{xy} + 6xy e^{xy} + 3x^2 y^2 e^{xy} + 6xy e^{xy} + 3x^2 y^2 e^{xy} + 3x^2 y^2 e^{xy} + x^3 y^3 e^{xy}\end{aligned}$$

Quando $x=y=0$, tutti i termini tranne il primo si annullano.

$$\frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} (e^{xy}) \Big|_{x=y=0} = 6$$

8/10

$$\frac{\partial^{2j}}{\partial x^i \partial y^i} (e^{xy}) \Big|_{x=y=0}$$

$$= \frac{\partial^0}{\partial x^i} (x^i e^{xy}) \Big|_{x=y=0}$$

$$= \cancel{0} \cancel{1} \cancel{2} \cancel{3} \cancel{4} \cancel{5}$$

$$= j! e^{xy} + [\text{molti termini,} \\ \text{ciascuno con} \\ \text{almeno 1 fattore} \\ \text{di } x] \Big|_{x=y=0}$$

$$= j!$$

$$c_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{re } j < k \\ 0 & \text{re } j > k \\ \frac{1}{j! j!} j! = \frac{1}{j!} & \text{re } j = k \end{cases}$$

9/10

$$\begin{aligned} e^{xy} &= \frac{1}{0!} x^0 y^0 + \frac{1}{1!} x^1 y^1 + \frac{1}{2!} x^2 y^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} x^3 y^3 + \frac{1}{4!} x^4 y^4 + \dots \\ &= 1 + xy + \frac{1}{2} (xy)^2 + \frac{1}{6} (xy)^3 \\ &\quad + \frac{1}{24} (xy)^4 + \dots, \end{aligned}$$

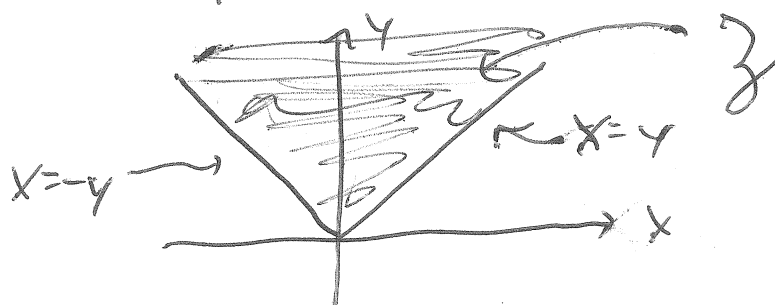
chiaramente giusto poiché

$$e^t = 1 + t + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{24} t^4 + \dots$$

per qualsiasi t = basta porre

$$t = xy.$$

□ $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$



10/10

$$\iiint e^{-lx-my} dA$$

$$= \int_{y=0}^{\infty} \left(\int_{x=-y}^{+y} e^{-lx-my} dx \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{\infty} e^{-my} \left(\int_{x=-y}^y e^{-lx} dx \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{\infty} e^{-my} \left(-\frac{1}{l} e^{-lx} \right) \Big|_{x=-y}^{x=y} dy$$

$$= \frac{1}{l} \int_{y=0}^{\infty} e^{-my} (e^{ly} - e^{-ly}) dy$$

$$= \frac{1}{l} \int_{y=0}^{\infty} e^{(m+l)y} - e^{(-m-l)y} dy$$

$$= \frac{1}{l} \left(\frac{1}{m-l} - \frac{1}{m+l} \right) = \frac{1}{l} \frac{2l}{m^2-l^2} = \frac{2}{m^2-l^2}$$