

DA FOTOCOPIARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 10 febbraio 2022

- Non si copia da nessuno.
- Non si chiede aiuto a nessuno; non si ottiene aiuto da nessuno.
- Ogni compito deve essere accompagnato da una dichiarazione (dettagli sotto) e di una riproduzione della Carta d'Identità.
- La durata della prova è di 3 ore, più 1 ora per mettere insieme tutto e spedirmelo. Quindi, l'esame comincia alle 10.00 e accetterò consegne fino alle 14.00.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con ragionevoli soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

In quanto l'esame è svolto in remoto, si può:

- far riferimento ad un libro di testo;
- far riferimento agli appunti;
- utilizzare una calcolatrice;
- oppure un calcolatore.

Per consegnare il compito, si deve scannerizzare il compito (meglio) o fotografarlo (peggio), e spedirmelo per posta elettronica. Inoltre:

- Come prima pagina o prime due pagine, si deve includere la Carta d'Identità, appositamente scannerizzata o fotografata.
- Dopodiché si deve includere questa dichiarazione:

La sottoscritta/il sottoscritto _____ dichiara che il lavoro qui consegnato è il suo lavoro, che non ha copiato da nessuno, e che non ha né chiesto né ottenuto aiuto da nessuno.

con tanto di *firma*, *data*, e *luogo*.

- Ogni pagina deve avere un numero di pagina sotto e una *firma* di lato.
- Per favore, mettete le soluzioni in ordine: prima la soluzione dell'Esercizio A, poi la soluzione dell'Esercizio B, ecc.

A. Sia $f(t)$ una funzione con periodo 2π .

1. Controllare che anche $f(\pi - t)$ abbia periodo 2π .
2. Sulla base di queste due serie di Fourier:

$$f(t) = \sum_j a_j e^{ijt} \qquad f(\pi - t) = \sum_j b_j e^{ijt}$$

esprimere i coefficienti b_j in termini dei coefficienti a_j .

3. Sulla base di queste formule integrali:

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ijt} dt \qquad b_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\pi - t) e^{-ijt} dt$$

esprimere i coefficienti b_j in termini dei coefficienti a_j .

4. Nel caso che $f(t) = f(\pi - t)$, che cosa si può dire a proposito dei coefficienti a_j ? Cosa vuol dire questo quando j è pari? Quando j è dispari?
5. Se $f(t) = f(\pi - t)$ e se inoltre $f(t)$ è dispari, cioè $f(t) = -f(-t)$, che cosa si può dire a proposito dei coefficienti a_j ?

B. Siano A , B , e C tre parametri fissi, e poniamo che siano tutti e i tre positivi. Trovare il valore massimo di $Ax + By + Cz$ sotto il vincolo $x^4 + y^4 + z^4 = 1$.

C. Siano l e m due parametri fissi, e sia $f(x, y) = e^{lx+my}$. La serie di Taylor per f è della forma:

$$f(x, y) = \sum_{j,k \geq 0} c_{j,k} x^j y^k$$

Trovare i coefficienti $c_{j,k}$.

D. Usare un'integrale doppio e calcolare l'area di $\mathcal{Q}$, il quarto di disco definito da:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

1/8

[A] ① si sa che $f(t+2\pi) = f(t)$.

Perciò

$$\begin{aligned} f(\pi - (t+2\pi)) &= f(\pi - t - 2\pi) \\ &= f(\pi - t - 2\pi + 2\pi) = f(\pi - t). \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \sum_j b_j e^{i j t} = f(\pi - t)$$

$$= \sum_j a_j e^{i j (\pi - t)}$$

$$= \sum_j a_j e^{-i j t} e^{i j \pi}$$

$j \rightsquigarrow -j$

$$= \sum_j a_{-j} e^{+i j t} e^{-i j \pi}$$

$$= \sum_j (-1)^j a_{-j} e^{i j t}$$

Risulta

$$b_j = (-1)^j a_{-j}$$

2/8

$$(3) \quad b_j = \frac{1}{2\pi} \int_{t=-\pi}^{\pi} f(\pi-t) e^{-ijs^t} dt$$

$$\begin{aligned} u &= \pi - t & dt &= -du \\ t &= \pi - u \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{u=2\pi}^0 f(u) e^{-ijs(\pi-u)} (-du)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{u=0}^{2\pi} f(u) e^{ijsu} e^{-ijs\pi} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} (-1)^j \int_{u=-\pi}^{\pi} f(u) e^{ijsu} du$$

$$= (-1)^j a_{-j}$$

(4) Se $f(t) = f(\pi-t)$, allora

$$a_j = b_j = (-1)^j a_{-j} = \begin{cases} a_{-j} & \text{se } j \text{ è pari} \\ -a_{-j} & \text{se } j \text{ è dispari} \end{cases}$$

3/8

5) Se $f(t)$ è dispari si
sa che $a_j = -a_{-j}$. Dunque

$$a_j = \begin{cases} a_{-j} & \text{se } j \text{ è pari} \\ -a_{-j} & \text{se } j \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -a_j & \text{se } j \text{ è pari} \\ a_j & \text{se } j \text{ è dispari} \end{cases}$$

Perciò,

$$\begin{aligned} a_j &= 0 & \text{se } j \text{ è pari} \\ a_j &= -a_{-j} & \text{se } j \text{ è dispari} \end{aligned}$$

[B]

$$\underline{\nabla} (Ax + By + Cz) = \lambda \underline{\nabla} (x^4 + y^4 + z^4)$$

$$\frac{4}{8}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda x^3 \\ 4\lambda y^3 \\ 4\lambda z^3 \end{pmatrix}$$

Se λ fosse negativo, allora x^3, y^3, z^3 sarebbero negativi, quindi x, y, z sarebbero negativi, quindi $Ax + By + Cz$ sarebbe negativo. Questo non può essere il valore massimo. Si deduce che λ è positivo.

$$\begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\lambda} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4\lambda} \right)^{1/3} \begin{pmatrix} A^{1/3} \\ B^{1/3} \\ C^{1/3} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_2 \begin{pmatrix} A^{1/3} \\ B^{1/3} \\ C^{1/3} \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda_2 = \left(\frac{1}{4\lambda} \right)^{1/3}.$$

5/9

~~11~~

$$\begin{aligned} 1 &= x^4 + y^4 + z^4 = \lambda_2^4 A^{4/3} + \lambda_2^4 B^{4/3} + \lambda_2^4 C^{4/3} \\ &= \lambda_2^4 (A^{4/3} + B^{4/3} + C^{4/3}) \\ \rightarrow \lambda_2 &= (A^{4/3} + B^{4/3} + C^{4/3})^{-1/4} \end{aligned}$$

$$Ax + By + Cz$$

$$= A \lambda_2 A^{1/3} + B \lambda_2 B^{1/3} + C \lambda_2 C^{1/3}$$

$$= \lambda_2 (A^{4/3} + B^{4/3} + C^{4/3})$$

$$= (A^{4/3} + B^{4/3} + C^{4/3})^{-1/4} (A^{4/3} + B^{4/3} + C^{4/3})$$

$$= (A^{4/3} + B^{4/3} + C^{4/3})^{3/4}$$

In quanto ~~le~~ i due gradienti
esistono dappertutto, in quanto
 $\nabla (x^4 + y^4 + z^4)$ non è mai zero,

(6/8)

in quanto non c'è nessuna frontiera, il valore trovato è necessariamente il massimo desiderato.

$$\boxed{C} \quad \frac{\partial}{\partial x} (e^{lx+my}) = l e^{lx+my}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{lx+my}) = l^2 e^{lx+my}$$

$$\frac{\partial}{\partial x \partial y} (e^{lx+my}) = lm e^{lx+my}$$

$\vdots$

$$\frac{\partial}{\partial x^i \partial y^k} (e^{lx+my}) = l^i m^k e^{lx+my}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i \partial y^k} (e^{lx+my}) \right|_{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = l^i m^k$$

7/8

$$C_{j,k} = \frac{1}{j!k!} l^j m^k$$

Quindi

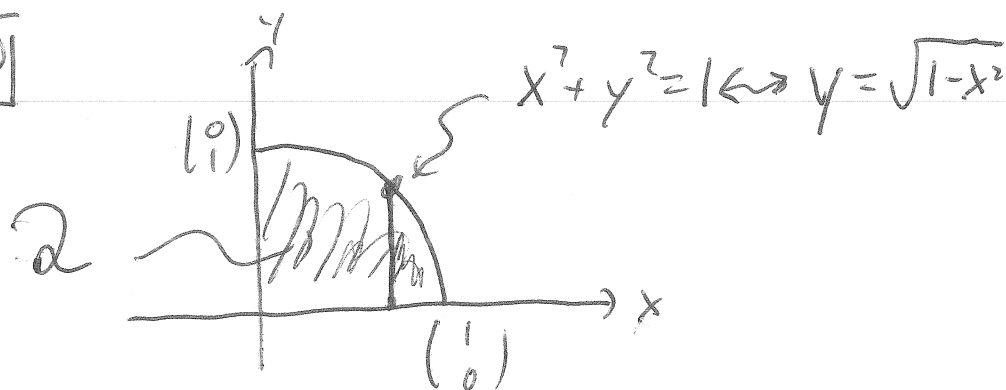
$$e^{lx+my} = \sum_{j,k \geq 0} \frac{1}{j!k!} l^j m^k x^j y^k$$

$$= \sum_{j,k \geq 0} \left(\frac{1}{j!} (lx)^j \right) \left(\frac{1}{k!} (my)^k \right)$$

$$= \left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} (lx)^j \right) \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (my)^k \right)$$

$$= e^{lx} e^{my}$$

[D]



8/8

$$\text{area}(2) = \iint_2 1 \, dA$$

$$= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$x = \cos \theta$$

$$dx = -\sin \theta \, d\theta$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sin \theta$$

$$x=0 \leftrightarrow \theta = \pi/2$$

$$x=1 \leftrightarrow \theta = 0$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta \cdot (-\sin \theta) \, d\theta$$

$$= \left[-\frac{\cos \theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = -\frac{1}{2} \left((0 + \frac{\pi}{2}) - (0 + 0) \right)$$

$$= \boxed{\pi/4}$$