

DA FOTOCOPIARE

Analisi 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 1 marzo 2021

- Non si copia da nessuno.
- Non si chiede aiuto a nessuno; non si ottiene aiuto da nessuno.
- Ogni compito deve essere accompagnato da una dichiarazione (dettagli sotto) e di una riproduzione della Carta d'Identità.
- La durata della prova è di 3 ore, più 1 ora per mettere insieme tutto e spedirmelo. Quindi, l'esame comincia alle 10.00 e accetterò consegne fino alle 14.00.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con buone soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

In quanto l'esame è svolto in remoto, si può:

- far riferimento ad un libro di testo;
- far riferimento agli appunti;
- utilizzare una calcolatrice;
- oppure un calcolatore.

Per consegnare il compito, si deve scannerizzare il lavoro (se questo è possibile) o fotografarlo, e spedirmelo per posta elettronica. Inoltre:

- Come prima pagina o prime due pagine, si deve includere la Carta d'Identità, appositamente scannerizzata o fotografata.
- Dopodiché si deve includere questa dichiarazione:

La sottoscritta/il sottoscritto _____ dichiara che il lavoro qui consegnato è il suo lavoro, che non ha copiato da nessuno, e che non ha né chiesto né ottenuto aiuto da nessuno.

con tanto di *firma, data, e luogo*.

- Ogni pagina deve avere un numero di pagina sotto e una *firma* di lato.
- Per favore, mettete le soluzioni in ordine: prima la soluzione dell'Esercizio A, poi la soluzione dell'Esercizio B, ecc.
- Se si spedisce il compito come risposta al messaggio del docente, stia attento a rispondere *solo al docente*, non a tutti.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = R \cos \theta \quad y = R \sin \theta \quad z = z \quad dx \, dy \, dz = R \, dR \, d\theta \, dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \sin \phi \cos \theta \quad y = r \sin \phi \sin \theta \quad z = r \cos \phi \\ dx \, dy \, dz = r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A. Si definisce $f(t)$ secondo

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{se } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |t| \geq 1 \end{cases}$$

Fare uno schizzo del grafico di $f(t)$. Poi calcolare $\hat{f}(\omega)$, la trasformata di Fourier di $f(t)$. Esprimere $\hat{f}(\omega)$

1. in termini di $e^{\pm i\omega}$ e
2. in termini di $\sin(\omega)$ e $\cos(\omega)$.

B. Siano $A, B, C \geq 0$ parametri fissi. Trovare il valore massimo di

$$Ax + By + Cz$$

sotto i vincoli $x, y, z \geq 0$ e $x^{4/3} + y^{4/3} + z^{4/3} = 1$.

C. Si consideri il paraboloide $\mathcal{P}$ definito dall'equazione $z = x^2 + y^2$.

1. Usare le coordinate sferiche e trovare la parametrizzazione di $\mathcal{P}$ con parametri ϕ e θ .
2. Calcolare dA , l'elemento d'area su $\mathcal{P}$, come un multiplo di $d\phi d\theta$.

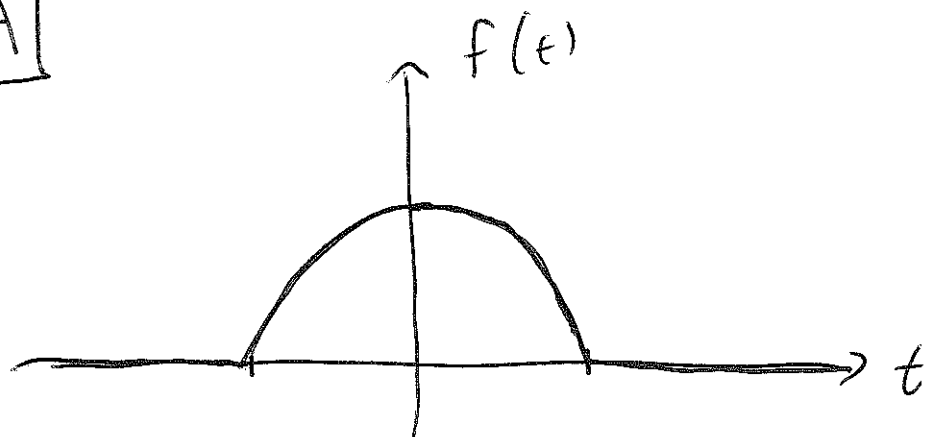
D. Siano P e Q parametri fissi con $P > Q > 0$. Sia $\mathcal{V}$ il volume definito da:

$$x^2 + y^2 \geq Q^2 \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq P^2$$

Fare un disegno di $\mathcal{V}$. Poi usare le coordinate cilindriche e calcolare il volume di $\mathcal{V}$.

①/⑩

A



$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2) e^{-i\omega t} dt\end{aligned}$$

$$\Downarrow \int e^{kt} dt = \frac{1}{k} e^{kt}$$

$$\int t^2 e^{kt} dt = \frac{1}{k} t^2 e^{kt} - \frac{2}{k^2} t e^{kt} + \frac{2}{k^3} e^{kt} \quad \text{I}$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} - \frac{1}{-i\omega} t^2 e^{-i\omega t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{(i\omega)^2} t e^{-i\omega t} - \frac{2}{(i\omega)^3} e^{-i\omega t} \right]_{t=-1}^1 \end{aligned}$$

(2) / (10)

$$= \left[\left(\frac{i}{\omega} - \frac{i}{\omega} t^2 - \frac{2}{\omega^2} t + \frac{2i}{\omega^3} \right) e^{-i\omega t} \right]_{t=-1}^1$$

$$= \left(\frac{i}{\omega} - \frac{i}{\omega} - \frac{2}{\omega^2} + \frac{2i}{\omega^3} \right) e^{-i\omega}$$

$$- \left(\frac{i}{\omega} - \frac{i}{\omega} + \frac{2}{\omega^2} + \frac{2i}{\omega^3} \right) e^{i\omega}$$

$$= \left(-\frac{2}{\omega^2} (e^{i\omega} + e^{-i\omega}) - \frac{2i}{\omega^3} (e^{i\omega} - e^{-i\omega}) \right) \quad (1)$$

$$= -\frac{2}{\omega^2} 2 \cos(\omega) - \frac{2i}{\omega^3} \cdot 2i \sin(\omega)$$

$$= \left(-\frac{4}{\omega^2} \cos(\omega) + \frac{4}{\omega^3} \sin(\omega) \right) \quad (2)$$

[B] Se il massimo si trova
per $x, y, z > 0$, deve valere
al punto del massimo

$$\nabla (Ax + By + Cz) = \lambda \nabla (x^{4/3} + y^{4/3} + z^{4/3})$$

(3)/(10)

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \lambda \cdot 4/3 \cdot \begin{pmatrix} x^{1/3} \\ y^{1/3} \\ z^{1/3} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \begin{pmatrix} x^{1/3} \\ y^{1/3} \\ z^{1/3} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{3} \cdot 1$$



$$x^{1/3} = A/\lambda_1$$

$$x = A^3/\lambda_1^3$$

$$y^{1/3} = B/\lambda_1 \rightarrow$$

$$y = B^3/\lambda_1^3$$

$$z^{1/3} = C/\lambda_1$$

$$z = C^3/\lambda_1^3$$



$$x = \lambda_2 A^3$$

$$y = \lambda_2 B^3$$

$$z = \lambda_2 C^3$$

$$\lambda_2 = 1/\lambda_1^3$$

Pen trovare λ_2 , si usa

$$1 = x^{4/3} + y^{4/3} + z^{4/3} = \lambda_2^{4/3} (A^4 + B^4 + C^4)$$

$$\textcircled{4} / \textcircled{10}$$

$$\hookrightarrow \lambda_2 = (A^4 + B^4 + C^4)^{-3/4}$$

Il massimo deve essere

$$Ax + By + Cz$$

$$= A(\lambda_2 A^3) + B(\lambda_2 B^3) + C(\lambda_2 C^3)$$

$$= \lambda_2 (A^4 + B^4 + C^4)$$

$$= (A^4 + B^4 + C^4)^{-3/4} (A^4 + B^4 + C^4)$$

$$= \textcircled{(A^4 + B^4 + C^4)^{1/4}}$$

Se il massimo si trovasse
per $x, y > 0$ ma $z = 0$, un
calcolo quasi identico
troverebbe il valore

$$(A^4 + B^4)^{1/4}$$

il quale è più piccolo del
valore sopra = non è il massimo.

(5/10)

Il ragionamento è lo stesso per i casi:

$$\odot x=0, \quad y, z > 0$$

$$\odot y=0, \quad x, z > 0$$

$$\odot x=y=0, \quad z=1$$

$$\odot x=z=0, \quad y=1$$

$$\odot y=z=0, \quad x=1$$

Nessuno di questi casi dà luogo al massimo.

$$\boxed{C} \quad z = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow r \cos \varphi &= (r \cos \varphi \cos \theta)^2 + (r \cos \varphi \sin \theta)^2 \\ &= r^2 \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\hookrightarrow \cos \varphi = r \cos^2 \varphi \rightarrow r = \cos \varphi / \cos^2 \varphi$$

6/10

$$(1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sec \phi \cos \theta \\ r \sec \phi \sin \theta \\ r \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos \phi / \sin \phi) \cos \theta \\ (\cos \phi / \sin \phi) \sin \theta \\ \cos^2 \phi / \sin^2 \phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cot \phi \cos \theta \\ \cot \phi \sin \theta \\ \cot^2 \phi \end{pmatrix}$$

(2)

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\csc^2 \phi \cos \theta \\ -\csc^2 \phi \sin \theta \\ -\csc^2 \phi - 2 \cot \phi \end{pmatrix}$$

$$= -\csc^2 \phi \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 2 \cot \phi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cot \phi (-\sin \theta) \\ \cot \phi (\cos \theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \cot \phi \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

7/10

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \theta}$$

$$= -\csc^2 \varphi \operatorname{ctg} \varphi \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 2 \operatorname{ctg} \varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\csc^2 \varphi \operatorname{ctg} \varphi \begin{pmatrix} -2 \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta \\ -2 \operatorname{ctg} \varphi \sin \theta \end{pmatrix}$$

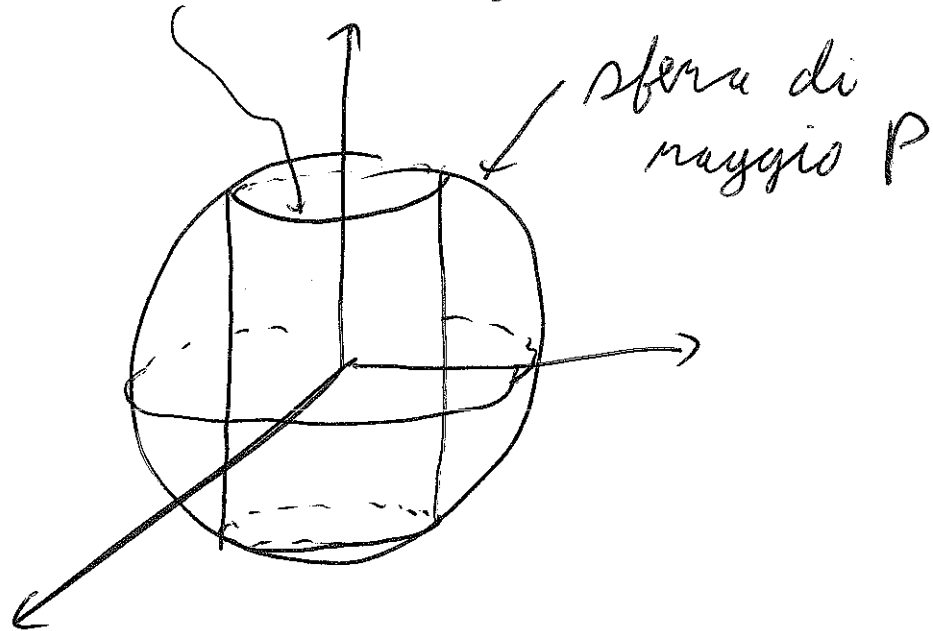
$$dA = \left| \frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\partial \theta} \right| d\varphi d\theta$$

$$= \csc^2 \varphi \operatorname{ctg} \varphi \left| \begin{pmatrix} -2 \operatorname{ctg} \varphi \cos \theta \\ -2 \operatorname{ctg} \varphi \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix} \right| d\varphi d\theta$$

$$= \csc^2 \varphi \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \varphi} d\varphi d\theta$$

(8) / (10)

□ cilindro di raggio Q



Q è la parte della sfera
fuori del cilindro

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 \geq Q^2 &\leadsto (R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2 \geq Q^2 \\&\leadsto R^2 \geq Q^2 \leadsto R \geq Q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 \leq P^2 &\leadsto R^2 + z^2 \leq P^2 \\&\leadsto R \leq \sqrt{P^2 - z^2}\end{aligned}$$

⑨/⑩

$$Q \leq R \leq \sqrt{P^2 - z^2}$$

Questi sono i limiti per R.
Per ottenere i limiti per z:

$$Q \leq \sqrt{P^2 - z^2} \rightarrow Q^2 \leq P^2 - z^2$$

$$\rightarrow z^2 \leq P^2 - Q^2 \rightarrow |z| \leq \sqrt{P^2 - Q^2}$$

$$\text{volume}(V) = \iiint_V 1 \, dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{z=-\sqrt{P^2-Q^2}}^{+\sqrt{P^2-Q^2}} \left(\int_{R=Q}^{\sqrt{P^2-z^2}} 1 \cdot R \, dR \right) dz \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{z=-\sqrt{P^2-Q^2}}^{+\sqrt{P^2-Q^2}} \left. \frac{R^2}{2} \right|_{R=Q}^{\sqrt{P^2-z^2}} dz$$

$$= 2\pi \int_{z=-\sqrt{P^2-Q^2}}^{+\sqrt{P^2-Q^2}} \frac{1}{2} (P^2 - Q^2 - z^2) dz$$

(10)/(10)

$$= \pi \left[(p^2 - q^2)z - \frac{z^3}{3} \right]_{-\sqrt{p^2 - q^2}}^{+\sqrt{p^2 - q^2}}$$

$$= \pi \left((p^2 - q^2) 2\sqrt{p^2 - q^2} - \frac{2}{3} (p^2 - q^2)^{3/2} \right)$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) (p^2 - q^2)^{3/2}$$

$$= \frac{4\pi}{3} (p^2 - q^2)^{3/2}$$