

DA SCANNERIZZARE

Analisi 2, Ingegneria (Steger)

Prova Scritta di 25 febbraio 2026

Regolamento:

- *I candidati non parlino fra di loro!*
- L'esame si affronta senza libri, ma è permesso un formulario di due pagine (A4), fronte e retro, scritto a mano dallo stesso candidato.
- Si può usare una calcolatrice. Sono vietati i telefonini, i computer, gli "orologi intelligenti" e tutti gli aggeggi capaci di collegarsi all'internet
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

Indicazioni:

- La durata dell'esame è 3 ore. Si può consegnare in anticipo.
- Ci sono 4 esercizi, da Esercizio A fino a Esercizio D. Un compito con ragionevoli soluzioni a 3 esercizi su 4 sarà sufficiente.
- Per favore, non consegnate i compiti che sapete di essere insufficienti. Non è obbligatorio consegnare, e preferisco non perdere tempo nel controllare i compiti insufficienti.

La trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

A. Si ricordi la formula chiusa per la somma geometrica:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r} \quad \text{se } |r| < 1.$$

Siano

$$f(t) = e^{-t^2} = \frac{1}{e^{t^2}} \qquad g(t) = \frac{1}{1 + e^{t^2}}$$

Accettiamo come noto che:

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$$

1. Usare la formula per la serie geometrica e calcolare $\hat{g}(\omega)$ come una serie della forma:

$$d_1 e^{-\omega^2/4} + d_2 e^{-\omega^2/8} + d_3 e^{-\omega^2/12} + d_4 e^{-\omega^2/16} + \dots$$

Trovare i valori dei coefficienti d_j .

2. Calcolare

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t) dt \qquad \text{e} \qquad \int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt$$

come somme infinite usando la risposta alla prima parte.

3. Verificare l'identità:

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) \overline{\hat{f}(\omega)} d\omega$$

B. Siano $A > 0$, $B > 0$, e $C > 0$ e $q > 1$ parametri fissi. Trovare il massimo e il minimo di $x^q + y^q + z^q$ sotto i vincoli:

$$x, y, z \geq 0 \qquad Ax + By + Cz = 1$$

Poi, trovare il massimo e il minimo nel caso $q = 1$, dove tutto è un po' diverso.

C. Trovare il polinomio di MacLaurin (polinomio di Taylor basato all'origine) della funzione

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$$

fino al ordine 4. (Quindi termini tipo x^5 , x^4y , x^3y^2 , x^2y^3 , xy^4 , y^5 e oltre saranno tutti inglobati in un termine d'errore $O(|(\frac{x}{y})|^5)$.) Poi trovare il polinomio di MacLaurin del inverso di quella funzione:

$$\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right) \left(\frac{2}{e^y + e^{-y}}\right)$$

sempre fino al ordine 4. (Indicazione: si può usare qualsiasi metodo, ma per questo particolare calcolo il metodo delle derivate parziali è particolarmente *inefficiente*.)

D. Sia $Q > 0$ un parametro costante. Si consideri la forma $\mathcal{F}$ definita da:

$$0 \leq y \leq x \qquad x^2 + z^2 \leq Q^2 \qquad y^2 + z^2 \leq Q^2$$

Prima fare un disegno, non di $\mathcal{F}$ stessa, ma di una sezione planare orizzontale di $\mathcal{F}$, cioè una sezione con un valore fisso di z . Poi usare le coordinate rettangolari (le coordinate cartesiane) e calcolare il volume di $\mathcal{F}$. (Indicazione: conviene che l'ultimo integrale sia l'integrale dz .)

1/12

È noto che

$$\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} = \hat{f}(t) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} dt$$

Con la sostituzione $t = \sqrt{A} \cdot u$
 $dt = \sqrt{A} \cdot du$

si trova

$$\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} = \int_{u=-\infty}^{+\infty} e^{-Au^2} e^{-i\omega \sqrt{A} u} \sqrt{A} du$$

$$= \sqrt{A} \int_{u=-\infty}^{+\infty} e^{-Au^2} e^{-i\omega \sqrt{A} u} u du$$

$$= \sqrt{A} \hat{g}(\sqrt{A} \omega)$$

dove $\cancel{g(u)} = e^{-Au^2}$ $h(u) = e^{-Au^2}$

Poi mettiamo $\omega/\sqrt{A}$ al posto di

$$\omega: \quad \sqrt{\pi} e^{-(\omega/\sqrt{A})^2/4} = \sqrt{A} \cancel{\hat{g}(\omega)} \hat{h}(\omega)$$

7/12

Si si ottiene la formula per $\hat{g}(w)$ che sarà usata più volte con diversi valori di A :

$$\hat{h}(w) \hat{g}(w) = \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{A}} e^{-w^2/4A}$$

$$(1) e^{t^2} > 1 \text{ ma } e^{-t^2} < 1.$$

$$g(t) = \frac{1}{1+e^{t^2}} = \frac{1}{e^{t^2}(1+e^{-t^2})}$$

$$= \frac{1}{e^{t^2}} (1 - e^{-t^2} + e^{-2t^2} - e^{-3t^2} + \dots)$$

$$= e^{-t^2} - e^{-2t^2} + e^{-3t^2} - e^{-4t^2} + \dots$$

$$= \sqrt{\pi} e^{-w^2/4} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-w^2/8} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} e^{-w^2/12} - \dots$$

$$= d_1 e^{-w^2/4} - d_2 e^{-w^2/8} + d_3 e^{-w^2/12} - \dots$$

dove

$$\begin{cases} d_j = \frac{\sqrt{\pi}}{j!} & \text{se } j \text{ è dispari} \\ d_j = \frac{-\sqrt{\pi}}{j!} & \text{se } j \text{ è pari} \end{cases}$$

3/12

$$\textcircled{2} \quad \int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \hat{g} |_{\omega=0} \\ = \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \right)$$

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} - \frac{1}{e^t} dt$$

$$= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^t} - \frac{1}{1+e^t} dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t) - g(t) dt$$

$$= \hat{f} |_{\omega=0} - \hat{g} |_{\omega=0}$$

$$= \sqrt{\pi} - \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots \right)$$

$$= \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots \right)$$

$$\textcircled{3} \quad \int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t) \overline{f(t)} dt = \int_{t=-\infty}^{+\infty} g(t) f(t)$$

$$= \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots \right)$$

$$\textcircled{4/12}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega) \hat{f}(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\pi} (e^{-\omega^2/4} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\omega^2/8} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\omega^2/12} + \dots) \cdot \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-2\omega^2/4} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-3\omega^2/8} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-4\omega^2/12} - \frac{1}{\sqrt{4}} e^{-5\omega^2/16} + \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-6\omega^2/20} - \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-7\omega^2/24} + \dots \right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{4}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{12}{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{16}{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{20}{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{24}{7}} + \dots \right)$$

$$\frac{5}{12}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\cancel{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{4}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \right. \\ \left. + \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{7}} \right. \\ \left. + \dots \right)$$

$$= \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots \right)$$

[B]

$$\nabla (x^a + y^a + z^a) = \begin{pmatrix} a x^{a-1} \\ a y^{a-1} \\ a z^{a-1} \end{pmatrix}$$

$$\nabla (Ax + By + Cz) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

6/12

$$q x^{q-1} = \lambda A$$

$$x^{q-1} = \frac{\lambda}{q} A = \lambda_2 A$$

$$q y^{q-1} = \lambda B \sim$$

$$y^{q-1} = \frac{\lambda}{q} B = \lambda_2 B$$

$$q z^{q-1} = \lambda C$$

$$z^{q-1} = \frac{\lambda}{q} C = \lambda_2 C$$

dove $\lambda_2 = \lambda/q$

$$x = \lambda_2^{1/(q-1)} A^{1/(q-1)} = \lambda_3 A^{1/(q-1)}$$

$$y = \lambda_2^{1/(q-1)} B^{1/(q-1)} = \lambda_3 B^{1/(q-1)}$$

$$z = \lambda_2^{1/(q-1)} C^{1/(q-1)} = \lambda_3 C^{1/(q-1)}$$

dove $\lambda_3 = \lambda_2^{1/(q-1)}$

$$f = Ax + By + Cz = A \lambda_3 A^{1/(q-1)}$$

$$+ B \lambda_3 B^{1/(q-1)}$$

$$+ C \lambda_3 C^{1/(q-1)}$$

$$= \lambda_3 (A^{q/(q-1)} + B^{q/(q-1)} + C^{q/(q-1)})$$

7/12

$$\lambda_3 = (A^{a/(a-1)} + B^{a/(a-1)} + C^{a/(a-1)})^{-1}$$

$$\begin{cases} x = A^{1/(a-1)} (A^{a/(a-1)} + B^{a/(a-1)} + C^{a/(a-1)})^{-1} \\ y = B^{1/(a-1)} (A^{a/(a-1)} + B^{a/(a-1)} + C^{a/(a-1)})^{-1} \\ z = C^{1/(a-1)} (A^{a/(a-1)} + B^{a/(a-1)} + C^{a/(a-1)})^{-1} \end{cases}$$

→ PUNTO CRITICO

VALORE AL PUNTO CRITICO

$$= x^a + y^a + z^a$$

$$\begin{aligned} &= A^{a/(a-1)} (A^{a/(a-1)} + B^{a/(a-1)} + C^{a/(a-1)})^{-a} \\ &\quad + B^{a/(a-1)} (A^{a/(a-1)} + B^{a/(a-1)} + C^{a/(a-1)})^{-a} \\ &\quad + C^{a/(a-1)} (A^{a/(a-1)} + B^{a/(a-1)} + C^{a/(a-1)})^{-a} \end{aligned}$$

$$= (A^{a/(a-1)} + B^{a/(a-1)} + C^{a/(a-1)})^{1-a}$$

4/4

8/12

La frontiera della zona d'interesse
è fatta da 3 spigoli

$$z \neq 0, \quad Ax + By = 1$$

$$y = 0, \quad Ax + Cz = 1$$

$$x = 0, \quad By + Cz = 1$$

e 3 vertici

$$Ax = 1, \quad y = z = 0$$

$$By = 1, \quad x = z = 0$$

$$Cz = 1, \quad x = y = 0$$

che danno possibili massimi
e minimi:

$$(A^{a/(q-1)} + B^{a/(q-1)})^{1-q}$$

$$(A^{a/(q-1)} + C^{a/(q-1)})^{1-q}$$

$$(B^{a/(q-1)} + C^{a/(q-1)})^{1-q}$$

$$A^{-q} = (A^{a/(q-1)})^{1-q}$$

$$B^{-q} = (B^{a/(q-1)})^{1-q}$$

$$C^{-q} = (C^{a/(q-1)})^{1-q}$$

9/12

In quanto $q > 1$, $1-q < 0$, si vede che il minimo è

$$(A^{q/(q-1)} + B^{q/(q-1)} + C^{q/(q-1)})^{1-q}$$

è il massimo è

$$\min(A, B, C)^{-q}$$

Se invece $q = 1$, l'equazione per il punto critico è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

che non ha nessuna soluzione (eccetto nel caso specialissimo che $A = B = C$).

Perciò, il massimo è il minimo devono trovarsi ai vertici

$$\begin{array}{ll} \text{massimo} & \text{è } \min(A, B, C)^{-1} \\ \text{minimo} & \text{è } \max(A, B, C)^{-1} \end{array}$$

10/12

$$c) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

$$(e^x + e^{-x})/2 = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)$$

$$(e^y + e^{-y})/2 = 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + O(y^5)$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{y^4}{24} + O(|(x, y)|^5)$$

$$\left(\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right) \left(\frac{2}{e^y + e^{-y}} \right)$$

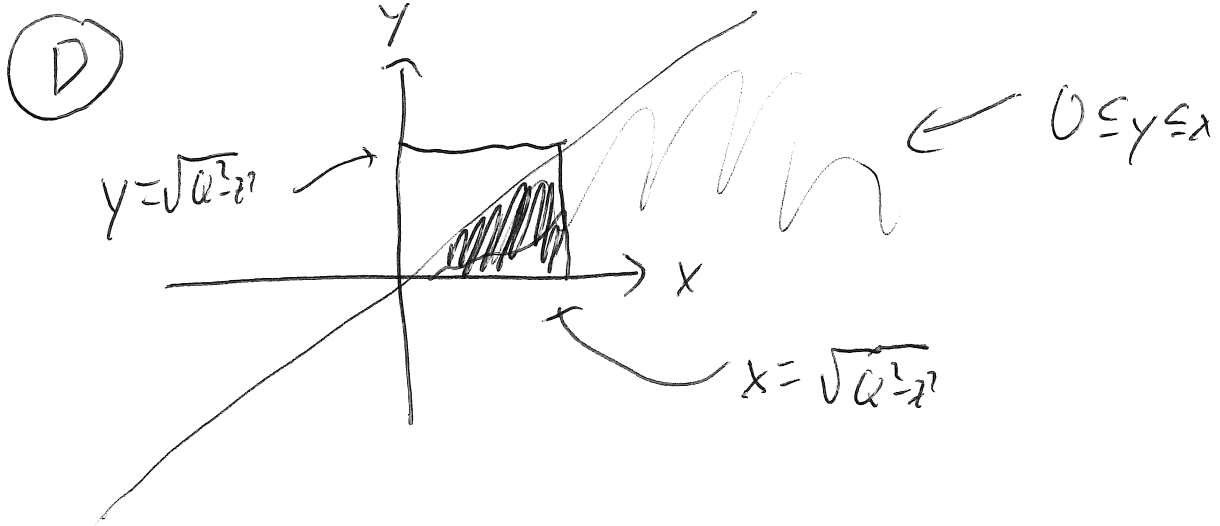
$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{y^4}{24} + O(|(x, y)|^5) \right)}$$

11/12

$$= 1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{y^4}{24} + O\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^5\right) \right. \\ \left. + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{y^4}{24} + O\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^5\right) \right)^2 \right. \\ \left. + O\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^6\right) \right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^2 y^2}{4} - \frac{y^4}{24} \\ + \frac{x^4}{4} + \frac{2x^2 y^2}{4} + \frac{y^4}{4} + O\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^5\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{5}{24}y^4 + O\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^5\right)$$



$$x^2 + z^2 \leq Q^2 \leadsto |x| \leq \sqrt{Q^2 - z^2}$$

$$y^2 + z^2 \leq Q^2 \leadsto |y| \leq \sqrt{Q^2 - z^2}$$

12/12

$$\text{volume}(\mathcal{F}) = \iiint_{\mathcal{F}} 1 \, dV$$

$$= \int_{z=-Q}^{+Q} \left(\int_{x=0}^{\sqrt{Q^2-z^2}} \left(\int_{y=0}^x 1 \, dy \right) dx \right) dz$$

$$= \int_{z=-Q}^{+Q} \left(\int_{x=0}^{\sqrt{Q^2-z^2}} x \, dx \right) dz$$

$$= \int_{z=-Q}^Q \left(\frac{1}{2} (Q^2 - z^2) \right) dz$$

area del
triangolo

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{z=0}^Q (Q^2 - z^2) dz$$

$$= \left(Q^2 z - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{z=0}^Q = Q^3 - \frac{Q^3}{3}$$

$$= \frac{2Q^3}{3}$$