Errori da Evitare — Steger

Ecco alcune identità *false* che non si dovrebbero mai utilizzare:

$$(A+B)^2 \neq A^2 + B^2 \qquad \frac{1}{A+B} \neq \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \qquad C^{A+B} \neq C^A + C^B$$

$$(A-B)^2 \neq A^2 - B^2 \qquad \frac{1}{A-B} \neq \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \qquad C^{A-B} \neq C^A - C^B$$

Ad esempio, se $A = 2$, $B = 1$, allora $(A+B)^2 = (2+1)^2 = 9 \neq 4+1 = 2^2+1^2 = A^2+B^2$. Se inoltre $C = 3$, allora $C^{A+B} = 3^{2+1} = 27 \neq 12 = 3^2+3^1 = C^A + C^B$. Basta trovare un singolo esempio numerico per convincersi che un'identità non vale.

1. Per ciascuna delle altre identità false sopra, controllare la falsità utilizzando $A = 2$, $B = 1$, $C = 3$.

2. Per ciascuna delle identità false sopra, controllare la falsità con altri valori di A, B, e C. Conviene usare valori semplici e piccoli. Spesso i valori 0, 1, e -1 sono sufficienti.

Altre identità *false* dello generale stesso tipo sono:

$$\operatorname{sen}(A+B) \neq \operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B) \qquad \operatorname{sen}(A-B) \neq \operatorname{sen}(A) - \operatorname{sen}(B)$$

$$\cos(A+B) \neq \cos(A) + \cos(B) \qquad \cos(A-B) \neq \cos(A) - \cos(B)$$

$$\log_C(A+B) \neq \log_C(A) + \log_C(B) \qquad \log_C(A-B) \neq \log_C(A) - \log_C(B)$$

Ad esempio, se $A = \pi/3 = 60°$ e $B = \pi/6 = 30°$, allora $\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1 \neq \sqrt{3}/2 + 1/2 = \operatorname{sen}(\pi/3) + \operatorname{sen}(\pi/6) = \operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B)$. Se $A = B = 4$ e $C = 2$, allora $\log_C(A+B) = \log_2(4+4) = 3 \neq 4 = \log_2(4) + \log_2(4) = \log_C(A) + \log_C(B)$.

3. Usare valori specifici per A, B, ed eventualmente C e dimostrare la falsità delle altre 4 identità sopra.

Probabilmente le identità false di sopra ci ingannano poiché sono analoghe alle identità *vere*:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad A(B-C) = AB - AC$$

note come le *leggi distributive*. C'è una netta differenza fra "$A(B+C)$" che vuol dire il prodotto di A con $B+C$ e "$\operatorname{sen}(B+C)$", che vuol dire l'applicazione della funzione sen all'argomento $B+C$.

Con $A = 2$, $B = 3$, $C = 1$, calcoliamo $A(B+C) = 2(3+1) = 8 = 2\cdot 3 + 2\cdot 1 = AB + AC$; $A(B-C) = 2(3-1) = 4 = 2\cdot 3 - 2\cdot 1 = AB - AC$.

4. Verificare le leggi distributive quando $A = 10$, $B = 8$, $C = 5$.

Al posto di alcune delle identità false sopra, ci sono versioni valide:

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB \qquad (A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$$

$$C^{A+B} = C^A C^B \qquad C^{A-B} = C^A / C^B$$

$$\operatorname{sen}(A+B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B \quad \operatorname{sen}(A-B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \quad \cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Invece, per $\log_C(A+B)$ e $1/(A+B)$ non ci sono formule utili in generale. Ecco la dimostrazione della prima identità sopra, tramite la legge distributiva:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B) \\ &= AA + AB + BA + BB = A^2 + B^2 + 2AB\end{aligned}$$

5. Fare il calcolo analogo per $(A-B)^2$.
Naturalmente $(A+B)^3 \neq A^3 + B^3$, e quando serve la formula corretta per il cubo di un binomio, si può procedere così:

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)^2(A+B) = (A^2+B^2+2AB)(A+B) \\ &= (A^2+B^2+2AB)A + (A^2+B^2+2AB)B = A^2A + B^2A + 2ABA + A^2B + B^2B + 2ABB \\ &= A^3 + AB^2 + 2A^2B + A^2B + B^3 + 2AB^2 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2\end{aligned}$$

6. Continuare così e ricavare $(A+B)^4 = A^4 + B^4 + 4A^3B + 4AB^3 + 6A^2B^2$ e $(A+B)^5 = A^5 + B^5 + 5AB^4 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3$.
Ecco alcune identità *false* per le frazioni:

$$\frac{A}{B+C} \neq \frac{A}{B} + \frac{A}{C} \qquad \frac{A+B}{C+D} \neq \frac{A}{C} + \frac{B}{D} \qquad \frac{A-B}{C-D} \neq \frac{A}{C} - \frac{B}{D}$$

$$\frac{AB+C}{AD} \neq \frac{B+C}{D} \qquad \frac{AB}{AC+D} \neq \frac{B}{C+D} \qquad \frac{AB+C}{AD+E} \neq \frac{B+C}{D+E}$$

7. Usare valori specifici di A, B, C, D, ed E per dimostrare che tutte queste identità sono false.
Per quanto riguarda le ultime tre identità false sopra, il problema sta nel fatto che non si può cancellare un fattore comune dal numeratore e dal denominatore se non è un fattore dell'intero numeratore e dell'intero denominatore. Alcune identità *vere* sono:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{B}{C} \qquad \frac{AB+AC}{AD} = \frac{A(B+C)}{AD} = \frac{B+C}{D}$$

$$\frac{AB}{AC+AD} = \frac{AB}{A(C+D)} = \frac{B}{C+D} \qquad \frac{AB+AC}{AD+AE} = \frac{A(B+C)}{A(D+E)} = \frac{B+C}{D+E}$$