Le Leggi per le Potenze — Steger

Si fissi una base $B \neq 0$. Per definizione $B^0 = 1$, $B^1 = B$, $B^2 = B{\cdot}B$, $B^3 = B{\cdot}B{\cdot}B$, $B^4 = B \cdot B \cdot B \cdot B$, ... Per definizione, $B^{-2} = 1/B^2$; in generale $B^{-n} = 1/B^n$.

Si calcoli $B^3B^2 = (B \cdot B \cdot B)(B \cdot B) = B^5$; in generale $B^mB^n = B^{m+n}$.

1. Verificare che $B^mB^n = B^{m+n}$ per $m = -2$, $n = -3$; per $m = 5$, $n = -3$; per $m = -5$, $n = 3$; e per $m = 3$, $n = -3$.

Si calcoli $B^5/B^3 = (B \cdot B \cdot B \cdot B \cdot B)/(B \cdot B \cdot B) = B \cdot B = B^2$; in generale $B^m/B^n = B^{m-n}$.

2. Verificare che $B^m/B^n = B^{m-n}$ per $m = 3$, $n = 5$; per $m = 3$, $n = -2$; per $m = 3$, $n = 3$; per $m = -3$, $n = 2$; per $m = -5$, $n = -3$; per $m = -3$, $n = -5$, e per $m = -3$, $n = -3$.

Si calcoli $(B^2)^3 = (B^2) \cdot (B^2) \cdot (B^2) = (B \cdot B)(B \cdot B)(B \cdot B) = B^6$; in generale $(B^m)^n = B^{mn}$.

3. Verificare che $(B^m)^n = B^{mn}$ per $m = 3$, $n = -2$; per $m = -3$, $n = 2$; e per $m = -3$, $n = -2$.

Si calcoli $(BC)^2 = (BC)(BC) = B{\cdot}C{\cdot}B{\cdot}C = B^2C^2$; in generale $(BC)^m = B^mC^m$. Inoltre $\left(\frac{B}{C}\right)^2 = \frac{B}{C} \cdot \frac{B}{C} = \frac{B^2}{C^2}$; in generale $\left(\frac{B}{C}\right)^m = \frac{B^m}{C^m}$.

4. Verificare che $(BC)^m = B^mC^m$ e che $(B/C)^m = B^m/C^m$ per $m = -2$ e per $m = 0$.

Ecco una tavola delle leggi per le potenze:

$$
\begin{aligned}
B^{m+n} &= B^mB^n & \qquad B^{mn} &= (B^m)^n \\
B^{m-n} &= B^m/B^n & \qquad (BC)^m &= B^mC^m \\
B^{-n} &= 1/B^n & \qquad (B/C)^m &= B^m/C^m \\
B^0 &= 1
\end{aligned}
$$

Fissata la base B, la prima legge dice che il calcolo di potenze converte una *somma* nell'esponente in un *prodotto* per gli esiti. Tutte le leggi della prima colonna corrispondono al principio che il calcolo di potenze converte operazioni *additive* per l'esponente in operazioni *moltiplicative* per gli esiti.

Supponiamo che B sia positiva. Allora, tutte le potenze di B sono positive, ad esempio $B^{-3} = 1/B^3$. Per B positiva, esistono anche potenze con esponenti non interi, ad esempio $B^{1/2}$ e B^π. Tutte le leggi sopra valgono anche per esponenti non interi.

Si osserva che $B^{1/2}B^{1/2} = B^{2/2} = B^1 = B$, cioè $(B^{1/2})^2 = B$. (Alternativamente $(B^{1/2})^2 = B^{1/2\cdot 2} = B^1 = B$.) Risulta:

$$B^{1/2} = \sqrt{B}$$

Onde:

$$\frac{\sqrt{B}}{B} = \frac{B^{1/2}}{B^1} = B^{\frac{1}{2}-1} = B^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{B^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{B}}$$

5. Controllare che $B^{1/m}$ soddisfa $(B^{1/m})^m = B$. Perciò $B^{1/m}$ è la soluzione dell'equazione $x^m = B$, nota *la radice m-esima di B.*