Leggi per i logaritmi — Steger

Si fissi una base B, $B > 0$, $B \neq 1$. Ogni numero $x > 0$ si può esprimere come potenza di B: $x = B^t$. La funzione che calcola l'esponente t a partire della potenza x, si chiama il *logaritmo in base* B.

$$x = B^{\log_B x} \qquad\qquad \log_B(B^t) = t$$

Ad esempio, $\log_2(32) = 5$, poiché $32 = 2^5$.

1. Calcolare $\log_2(64)$, $\log_2(1/8)$, $\log_2(1)$, $\log_{10}(1.000.000)$, $\log_{10}(0{,}000.001)$, e $\log_{10}(1)$.

Per la matematica (sempre) e i calcolatori (normalmente) "log" sta per $\log_e$, dove $e = 2{,}718281828\ldots$, la base di Eulero. Per la scienza (normalmente) e le calcolatrici (sempre) "log" sta per $\log_{10}$, e si scrive "ln" per $\log_e$.
La regola di base per le potenze è $B^{m+n} = B^m B^n$; una somma nell'esponente si converte in un prodotto per le potenze. Il logaritmo fa esattamente l'opposto, converte un prodotto in una somma. Ad esempio $B^2B^3 = B^{2+3}$, quindi $\log_B(B^2B^3) = \log_B(B^{2+3}) = 2 + 3 = \log_B(B^2) + \log_B(B^3)$. Il calcolo generale è questo:

$$\log_B(xy) = \log_B\left(B^{\log_B x} B^{\log_B y}\right) = \log_B\left(B^{\log_B x + \log_B y}\right) = \log_B x + \log_B y$$

Altrettanto, il logaritmo converte un rapporto in una differenza:

$$\log_B(x/y) = \log_B\left(B^{\log_B x}/B^{\log_B y}\right) = \log_B\left(B^{\log_B x - \log_B y}\right) = \log_B x - \log_B y$$

In quanto il logaritmo converte prodotti in somme, $\log_B x^2 = \log_B(x \cdot x) = \log_B(x) + \log_B(x) = 2\log_B(x)$. Questo vale per qualsiasi esponente t al posto di 2.

$$\log_B(x^t) = \log_B\left(\left(B^{\log_B x}\right)^t\right) = \log_B\left(B^{(\log_B x)t}\right) = t\log_B x$$

Il seguente calcolo permette di esprimere i logaritmi in una base usando i logaritmi in un altra base:

$$\log_B(x) = \log_B\left(C^{\log_C x}\right) = \log_C(x)\log_B(C) \quad \text{onde} \quad \log_C(x) = \log_B(x)/\log_B(C)$$

Ecco tutte le leggi per i logaritmi:

$$\begin{aligned} \log_B(xy) &= \log_B x + \log_B y & \log_B(x^t) &= t\log_B(x) \\ \log_B(x/y) &= \log_B x - \log_B y & \log_C(x) &= \log_B(x)/\log_B(C) \\ \log_B(1/y) &= -\log_B y & & \\ \log_B(1) &= 0 & & \end{aligned}$$

La prima legge dice che il logaritmo converte prodotti in somme, e le altre leggi della prima colonna dicono che il logaritmo converte operazioni moltiplicative nelle corrispondenti operazioni additive.