

Steger — Funzione di ... per la Derivata di ...

La *regola della catena*: se $y = y(x)$ e $z = z(y)$, allora $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Ad esempio, mettiamo $y = \text{sen}(x)$ e $z = y^3 = (\text{sen } x)^3 = \text{sen}^3 x$. Allora:

$$\frac{dz}{dy} = 3y^2 = 3(\text{sen } x)^2 \quad \frac{dy}{dx} = \cos x \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 3 \text{sen}^2 x \cos x$$

In breve $d(\text{sen}^3 x)/dx = 3 \text{sen}^2 x \cos x$. La forma della derivata è “funzione di $\text{sen } x$ per la derivata di $\text{sen } x$ ”.

Per una funzione di quella forma, la primitiva sarà un'altra funzione di $\text{sen } x$.

$$\int 3 \text{sen}^2 x \cos x \, dx = \text{sen}^3 x \quad \text{oppure} \quad \int \text{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \text{sen}^3 x$$

In quanto $\text{sen}^2 x \cos x$ ha la forma “funzione di $\text{sen } x$ per la derivata di $\text{sen } x$ ”, la sua primitiva è relativamente facile.

1. Calcolare le primitive di: $\text{sen}^3 x \cos x$, $\text{sen}^4 x \cos x$, $\text{sen } x \cos x$, $(\text{sen } x)^{-2} \cos x$, $\cos x / \text{sen}^2 x$, e $\cos x / \text{sen}^3 x$.

2. Calcolare le primitive di: $\cos x / \text{sen } x$, $\sqrt{\text{sen } x} \cos x$, $\cos x / \sqrt{\text{sen } x}$, $\cos x e^{\text{sen } x}$, $\cos(x) \text{sen}(\text{sen } x)$, $\cos x \cos(\text{sen } x)$, $\cos x \sec(\text{sen } x)$.

Per una qualsiasi *fattore costante* A , $d(Ay)/dx = A dy/dx$. Perciò, se abbiamo trovato una primitiva a meno di un *fattore costante*, è facile calcolarla esattamente. Il caso classico:

$$d(x^2)/dx = 2x \quad \text{quindi} \quad \int 2x \, dx = x^2 \quad \text{quindi} \quad \int x \, dx = x^2/2$$

Se dobbiamo calcolare $\int \cos^4 x \text{sen } x \, dx$, conviene vederlo come “funzione di $\cos x$ per la derivata di $\cos x$ ”, anche se $\text{sen } x$ è la derivata di $\cos x$ solo a meno del fattore costante -1 . Effettivamente:

$$\frac{d(\cos x)^5}{dx} = 5(\cos x)^4(-\text{sen } x) \quad \text{quindi} \quad \int \cos^4 x \text{sen } x \, dx = \frac{-1}{5} \cos^5 x$$

3. Calcolare le primitive di $\cos^3 x \text{sen } x$, $\cos^2 x \text{sen } x$, $\cos x \text{sen } x$, $\text{sen } x / \cos^2 x$, $\text{sen } x / \cos^3 x$.

4. Calcolare le primitive di $\text{sen } x / \cos x$, $\text{sen } x \sqrt{\cos x}$, $e^{\cos x} \text{sen } x$, e $\text{sen } x \text{tg}(\cos x)$.

Se dobbiamo calcolare $\int x/(x^2 + 1) \, dx$, conviene trattarla come il prodotto di $1/(x^2 + 1)$ con x . Il primo fattore è una funzione di $x^2 + 1$, e la seconda è la derivata di $x^2 + 1$, a meno di un fattore 2. Risulta:

$$\frac{d \log(x^2 + 1)}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} (2x) \quad \text{quindi} \quad \int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$$

5. Calcolare le primitive di $x^2/(x^3 + 10)$, $x^2/(10x^3 + 1)$, $x^3/(x^4 + 4)$, $x^3/(5x^4 + 6)$, $e^x/(e^x + 1)$, $e^x/(2e^x + 1)$, e $e^{5x}/(2e^{5x} + 1)$.

6. Calcolare le primitive di $x/(x^2 + 1)^2$, $e^x/(e^x + 1)^2$, $x^2/(4x^3 + 5)^6$, e $\sin x/(1 + \cos x)^2$.
7. Calcolare le primitive di $\sin x \log(\cos x)$, $\cos x \log(\sin x)$, $\sin 5x \log(\cos 5x)$, $e^x \log(e^x)$.
8. Calcolare le primitive di $(\log x)^2/x$ e $(\operatorname{arctg} x)^3/(1 + x^2)$, $(\operatorname{arcsen} x)^4/\sqrt{1 - x^2}$, $\log x/x$, $\operatorname{arctg} x/(1 + x^2)$, e $\operatorname{arcsen} x/\sqrt{1 - x^2}$.
9. Calcolare $\int (2Ax + B)/(Ax^2 + Bx + C) dx$ e $\int (2Ax + B)/(Ax^2 + Bx + C)^2 dx$.