

## Steger — Funzione di ... per la Derivata di ...

La *regola della catena*: se  $y = y(x)$  e  $z = z(y)$ , allora  $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ .

Ad esempio, mettiamo  $y = \text{sen}(x)$  e  $z = y^3 = (\text{sen } x)^3 = \text{sen}^3 x$ . Allora:

$$\frac{dz}{dy} = 3y^2 = 3(\text{sen } x)^2 \quad \frac{dy}{dx} = \cos x \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 3 \text{sen}^2 x \cos x$$

In breve  $d(\text{sen}^3 x)/dx = 3 \text{sen}^2 x \cos x$ . La forma della derivata è “funzione di  $\text{sen } x$  per la derivata di  $\text{sen } x$ ”.

Per una funzione di quella forma, la primitiva sarà un'altra funzione di  $\text{sen } x$ .

$$\int 3 \text{sen}^2 x \cos x \, dx = \text{sen}^3 x \quad \text{oppure} \quad \int \text{sen}^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \text{sen}^3 x$$

In quanto  $\text{sen}^2 x \cos x$  ha la forma “funzione di  $\text{sen } x$  per la derivata di  $\text{sen } x$ ”, la sua primitiva è relativamente facile.

**1.** Calcolare le primitive di:  $\text{sen}^3 x \cos x$ ,  $\text{sen}^4 x \cos x$ ,  $\text{sen } x \cos x$ ,  $(\text{sen } x)^{-2} \cos x$ ,  $\cos x / \text{sen}^2 x$ , e  $\cos x / \text{sen}^3 x$ .

**2.** Calcolare le primitive di:  $\cos x / \text{sen } x$ ,  $\sqrt{\text{sen } x} \cos x$ ,  $\cos x / \sqrt{\text{sen } x}$ ,  $\cos x e^{\text{sen } x}$ ,  $\cos(x) \text{sen}(\text{sen } x)$ ,  $\cos x \cos(\text{sen } x)$ ,  $\cos x \sec(\text{sen } x)$ .

Per una qualsiasi *fattore costante*  $A$ ,  $d(Ay)/dx = A dy/dx$ . Perciò, se abbiamo trovato una primitiva a meno di un *fattore costante*, è facile calcolarla esattamente. Il caso classico:

$$d(x^2)/dx = 2x \quad \text{quindi} \quad \int 2x \, dx = x^2 \quad \text{quindi} \quad \int x \, dx = x^2/2$$

Se dobbiamo calcolare  $\int \cos^4 x \text{sen } x \, dx$ , conviene vederlo come “funzione di  $\cos x$  per la derivata di  $\cos x$ ”, anche se  $\text{sen } x$  è la derivata di  $\cos x$  solo a meno del fattore costante  $-1$ . Effettivamente:

$$\frac{d(\cos x)^5}{dx} = 5(\cos x)^4(-\text{sen } x) \quad \text{quindi} \quad \int \cos^4 x \text{sen } x \, dx = \frac{-1}{5} \cos^5 x$$

**3.** Calcolare le primitive di  $\cos^3 x \text{sen } x$ ,  $\cos^2 x \text{sen } x$ ,  $\cos x \text{sen } x$ ,  $\text{sen } x / \cos^2 x$ ,  $\text{sen } x / \cos^3 x$ .

**4.** Calcolare le primitive di  $\text{sen } x / \cos x$ ,  $\text{sen } x \sqrt{\cos x}$ ,  $e^{\cos x} \text{sen } x$ , e  $\text{sen } x \text{tg}(\cos x)$ .

Se dobbiamo calcolare  $\int x/(x^2 + 1) \, dx$ , conviene trattarla come il prodotto di  $1/(x^2 + 1)$  con  $x$ . Il primo fattore è una funzione di  $x^2 + 1$ , e la seconda è la derivata di  $x^2 + 1$ , a meno di un fattore 2. Risulta:

$$\frac{d \log(x^2 + 1)}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} (2x) \quad \text{quindi} \quad \int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$$

**5.** Calcolare le primitive di  $x^2/(x^3 + 10)$ ,  $x^2/(10x^3 + 1)$ ,  $x^3/(x^4 + 4)$ ,  $x^3/(5x^4 + 6)$ ,  $e^x/(e^x + 1)$ ,  $e^x/(2e^x + 1)$ , e  $e^{5x}/(2e^{5x} + 1)$ .

6. Calcolare le primitive di  $x/(x^2 + 1)^2$ ,  $e^x/(e^x + 1)^2$ ,  $x^2/(4x^3 + 5)^6$ , e  $\sin x/(1 + \cos x)^2$ .
7. Calcolare le primitive di  $\sin x \log(\cos x)$ ,  $\cos x \log(\sin x)$ ,  $\sin 5x \log(\cos 5x)$ ,  $e^x \log(e^x)$ .
8. Calcolare le primitive di  $(\log x)^2/x$  e  $(\operatorname{arctg} x)^3/(1 + x^2)$ ,  $(\operatorname{arcsen} x)^4/\sqrt{1 - x^2}$ ,  $\log x/x$ ,  $\operatorname{arctg} x/(1 + x^2)$ , e  $\operatorname{arcsen} x/\sqrt{1 - x^2}$ .
9. Calcolare  $\int (2Ax + B)/(Ax^2 + Bx + C) dx$  e  $\int (2Ax + B)/(Ax^2 + Bx + C)^2 dx$ .