Steger: Trigonometria

Le funzioni trigonometriche di base sono $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$. Il punto sul piano con coordinate $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ giace sulla circonferenze di raggio 1 attorno l'origine. Questo fatto geometrico corrisponde all'identità trigonometrica:

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \tag{1}$$

Le altre funzioni trigonometriche sono:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

Moltiplicando l'identità (1) per $1/\cos^2 t$ si ottiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} \qquad \text{cioè} \qquad \operatorname{tg}^2 t + 1 = \sec^2 t \tag{2}$$

1. Moltiplicare (1) per $1/\operatorname{sen}^2 t$ ed ottenere un'identità che collega $\operatorname{ctg} t$ e $\csc t$.

Sulla base di (1) e (2) si può trovare il valore di qualsiasi funzione trigonometrica in termini di qualsiasi altra funzione trigonometrica. Se il valore di $\cos t$ è noto, allora da (1) si ottiene $\operatorname{sen} t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t}$, da cui

$$\begin{array}{ll} \cos t = \cos t & \operatorname{sen} t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t} \\ \sec t = 1/\cos t & \csc t = \pm 1/\sqrt{1-\cos^2 t} \\ \operatorname{tg} t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t}/\cos t & \operatorname{ctg} t = \pm\cos t/\sqrt{1-\cos^2 t} \end{array} \tag{3}$$

2. Costruire una tabella simile a (3) che esprime le 6 funzioni trigonometriche in termini di $\operatorname{sen} t$.

Adesso, supponiamo che il valore di $\sec t$ è noto. Allora possiamo calcolare $\cos t = 1/\sec t$,

$$\operatorname{sen} t = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 t}} = \pm\sqrt{\frac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t}} = \frac{\pm\sqrt{\sec^2 t - 1}}{\sec t}$$

da cui

$$\begin{array}{ll} \cos t = 1/\sec t & \operatorname{sen} t = \pm\sqrt{\sec^2 t - 1}/\sec t \\ \sec t = \sec t & \csc t = \pm\sec t/\sqrt{\sec^2 t - 1} \\ \operatorname{tg} t = \pm\sqrt{\sec^2 t - 1} & \csc t = \pm 1/\sqrt{\sec^2 t - 1} \end{array} \tag{4}$$

3. Costruire una tabella simile a (4) che esprime le 6 funzioni trigonometriche in termini di $\csc t$.

Ora, supponiamo che il valore di $\operatorname{tg} t$ è noto.

4. Usare (2) ed ottenere $\sec t = \pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}$.

5. Usare l'esercizio precedente ed ottenere un'espressione per $\cos t$ in termini di $\operatorname{tg} t$.

6. Usare l'identità $\operatorname{sen} t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\cos t = \operatorname{tg} t \cos t$ e ottenere $\operatorname{sen} t = \pm \operatorname{tg} t/\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}$.

7. Costruire una tabella simile a (4) che esprime le 6 funzioni trigonometriche in termini di $\operatorname{tg} t$.

Finalmente, supponiamo che il valore di $\operatorname{ctg} t$ è noto.

8. Costruire una tabella simile a (4) che esprime le 6 funzioni trigonometriche in termini di $\operatorname{ctg} t$.

È possibile esprimere tutte le funzioni trigonometriche senza usare le radici quadrate? Sí, ma il valore di base è:

$$Q = \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t} \tag{5}$$

Moltiplicando numeratore è denominatore per $1+\cos t$ si ottiene

$$\begin{aligned} Q &= \frac{(1-\cos t)\operatorname{sen} t}{(1-\cos t)(1+\cos t)} \\ &= \frac{(1-\cos t)\operatorname{sen} t}{1-\cos^2 t} = \frac{(1-\cos t)\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t} \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{Q} + Q = \frac{1+\cos t}{\operatorname{sen} t} + \frac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{2}{\operatorname{sen} t} \tag{6}$$

9. Risolvere (6) per $\operatorname{sen} t$. (Risposta: $\operatorname{sen} t = 2Q/(1+Q^2)$.)

10. Risolvere (5) per $\cos t$, e poi usare la risposta all'esercizio precedente per esprimere $\cos t$ in termini di Q.
(Risposta: $\cos t = (1-Q^2)/(1+Q^2)$.)

11. Controllare che

$$\left(\frac{2Q}{1+Q^2}\right)^2 + \left(\frac{1-Q^2}{1+Q^2}\right)^2 = 1$$

Perchè dovrebbe venire cosí?

12. Costruire una tabella simile a (4) che esprime le 6 funzioni trigonometriche in termini di Q.

13. Sulla base delle formule:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &= \operatorname{sen} 2(t/2) = 2\operatorname{sen}(t/2)\cos(t/2) \\ \cos t &= \cos 2(t/2) = \cos^2(t/2) - \operatorname{sen}^2(t/2) \end{aligned}$$

dimostrare che $Q = \operatorname{tg}(t/2)$.