Steger — Integrazione per parti

Supponiamo che $U = U(x)$ e $u = u(x) = dU/dx$; altrettanto che $V = V(x)$ e $v = v(x) = dV/dx$. La regola per la derivata del prodotto è:

$$\frac{d}{dx}(UV) = (dU/dx)V + U(dV/dx) = uV + Uv \quad \text{cioè} \quad Uv = \frac{d}{dx}(UV) - uV$$

Calcolando le primitive a sinistra e a destra di quest'ultimo si ricava la regola per *l'integrazione per parti*

$$\int Uv\,dx = \int \frac{d}{dx}(UV)\,dx - \int uV\,dx = UV - \int uV\,dx$$

Inserendo limiti d'integrazione si ottiene:

$$\int_a^b Uv\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}(UV)\,dx - \int_a^b uV\,dx = U(b)V(b) - U(a)V(a) - \int_a^b uV\,dx$$

In questo esempio si applica l'integrazione per parti due volte:

$$\int x^2\cos(kx)\,dx = x^2\,\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k} - \int (2x)\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}\,dx$$

$$= \frac{x^2\operatorname{sen}(kx)}{k} - \frac{2}{k}\int x\operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{x^2\operatorname{sen}(kx)}{k} - \frac{2}{k}\,x\,\frac{-\cos(kx)}{k} + \frac{2}{k}\int 1\,\frac{-\cos(kx)}{k}\,dx$$

$$= \frac{x^2\operatorname{sen}(kx)}{k} + \frac{2x\cos(kx)}{k^2} - \frac{2}{k^2}\int \cos(kx)\,dx = \frac{x^2\operatorname{sen}(kx)}{k} + \frac{2x\cos(kx)}{k^2} - \frac{2}{k^2}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k}$$

$$= \frac{x^2\operatorname{sen}(kx)}{k} + \frac{2x\cos(kx)}{k^2} - \frac{2\operatorname{sen}(kx)}{k^3}$$

1.

$$\int xe^{kx}\,dx = \cdots = \frac{xe^{kx}}{k} - \frac{e^{kx}}{k^2}$$

$$\int x\cos(kx)\,dx = \cdots = \frac{x\operatorname{sen}(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

$$\int x\operatorname{sen}(kx)\,dx = \cdots = \frac{-x\cos(kx)}{k} + \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k^2}$$

$$\int x^2e^{kx}\,dx = \cdots = \frac{x^2e^{kx}}{k} - \frac{2xe^{kx}}{k^2} + \frac{2e^{kx}}{k^3}$$

$$\int x^2\operatorname{sen}(kx)\,dx = \cdots = \frac{-x^2\cos(kx)}{k} + \frac{2x\operatorname{sen}(kx)}{k^2} + \frac{2\cos(kx)}{k^3}$$

$$\int x^3e^{kx}\,dx = \cdots = \frac{x^3e^{kx}}{k} - \frac{3x^2e^{kx}}{k^2} + \frac{6xe^{kx}}{k^3} - \frac{6e^{kx}}{k^4}$$

$$\int x^3\cos kx\,dx = \cdots = \frac{x^3\operatorname{sen}(kx)}{k} + \frac{3x^2\cos(kx)}{k^2} - \frac{6x\operatorname{sen}(kx)}{k^3} - \frac{6\cos(kx)}{k^4}$$

In questo esempio, occorre *introdurre* un secondo fattore:

$$\int \log x\,dx = \int \log x \cdot 1\,dx = \log x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x$$

2.

$$\int x\log x\,dx = \cdots = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4}$$

$$\int x^2\log x\,dx = \cdots = \frac{x^3\log x}{3} - \frac{x^2}{9}$$

$$\int x^A\log x\,dx = \cdots = \frac{x^{A+1}\log x}{A+1} - \frac{x^{A+1}}{(A+1)^2}$$

$$\int (\log x)^2\,dx = \cdots = x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x$$

$$\int x^A(\log x)^2\,dx = \cdots = \frac{x^{A+1}(\log x)^2}{A+1} - \frac{2x^{A+1}\log x}{(A+1)^2} + \frac{2x^{A+1}}{(A+1)^3}$$

$$\int (\log x)^3\,dx = \cdots = x(\log x)^3 - 3x(\log x)^2 + 6x\log x - 6x$$

$$\int x^A(\log x)^3\,dx = \cdots = \frac{x^{A+1}(\log x)^3}{A+1} - \frac{3x^{A+1}(\log x)^2}{(A+1)^2} + \frac{6x^{A+1}\log x}{(A+1)^3} - \frac{6x^{A+1}}{(A+1)^4}$$

Ecco un esempio con limiti:

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2(1-t)^3\,dt &= t^2\left(\frac{-(1-t)^4}{4}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (2t)\left(\frac{-(1-t)^4}{4}\right)dt = \frac{2}{4}\int_0^1 t(1-t)^4\,dt \\ &= \frac{2}{4}\,t\left(\frac{-(1-t)^5}{5}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1 (1-t)^5\,dt = \frac{2\cdot 1}{4\cdot 5}\left(\frac{-(1-t)^6}{6}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{2\cdot 1}{4\cdot 5\cdot 6} = \frac{(2\cdot 1)(3\cdot 2\cdot 1)}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{2!\,3!}{6!} = \frac{1}{60}\end{aligned}$$

dove si usa la definizione del *fattoriale*

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

3. Verificare questo esito con il calcolo:

$$\int_0^1 t^2(1-t)^3\,dt = \int_0^1 t^2(1-3t+3t^2-t^3)\,dt = \int_0^1 t^2 - 3t^3 + 3t^4 - t^5\,dt = \cdots = \frac{1}{60}$$

Questo calcolo è più diretto, ma ci vuole più tempo è più fatica; conseguentemente c'è più possibilità di sbagliare. Non è sempre migliore il metodo più diretto!

4.

$$\int_0^1 t^2(1-t)^4\,dt = \cdots = \frac{2!\,4!}{7!} = \frac{1}{105}$$
$$\int_0^1 t^2(1-t)^5\,dt = \cdots = \frac{2!\,5!}{8!} = \frac{1}{168}$$
$$\int_0^1 t^2(1-t)^n\,dt = \cdots = \frac{2!\,n!}{(n+3)!}$$
$$\int_0^1 t(1-t)^n\,dt = \cdots = \frac{1!\,n!}{(n+2)!}$$
$$\int_0^1 t^3(1-t)^2\,dt = \cdots = \frac{3!\,2!}{6!} = \frac{1}{60}$$
$$\int_0^1 t^3(1-t)^n\,dt = \cdots = \frac{3!\,n!}{(n+4)!}$$
$$\int_0^1 t^4(1-t)^n\,dt = \cdots = \frac{4!\,n!}{(n+5)!}$$

5. Che cos'è la formula per $\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt$?

6. Si vede che $\int_0^1 t^2(1-t)^3\,dt = 1/60 = \int_0^1 t^3(1-t)^2\,dt$; in generale $\int_0^1 t^m(1-t)^n\,dt = \int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt$. Dimostrare questa identità attraverso la sostituzione $t = 1-u$, $dt = -du$.

7. Usare la sostituzione $t = \operatorname{sen}^2\theta$, $dt = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta$ e calcolare:

$$\begin{aligned}\int_{t=0}^{t=1} t^{1/2}(1-t)^{1/2}\,dt = \cdots &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} 2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta \\ &=2\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} (1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\,d\theta = \cdots = \pi/8\end{aligned}$$

Con l'esito di esercizio (**5**), dedurre che $(1/2)! = \sqrt{\pi}/2$. Effettivamente, esiste una definizione di $n!$ che funziona anche quando n non sia un intero, e con quella definizione $(1/2)! = \sqrt{\pi}/2$ è giusto. Con la stessa sostituzione, calcolare:

$$\int_{t=0}^{t=1} t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\,dt = \cdots = \pi$$

e dedurre che $(-1/2)! = \sqrt{\pi}$.