Steger — Le Antiderivate delle Potenze del Coseno

Formule di base:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

Le derivate di tangente e di secante:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{(\cos x)(\cos x) - (-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$
$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$$

Risulta:

$$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x \qquad \int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x$$

Per una potenza del coseno:

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x\, dx &= \int \cos x \cos^{n-1} x\, dx \\
&= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x - \int \operatorname{sen} x\,(n-1)(\cos^{n-2} x)(-\operatorname{sen} x)\, dx \\
&= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \int (n-1)\operatorname{sen}^2 x \cos^{n-2} x\, dx \\
&= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \int (n-1)(1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\, dx \\
&= \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1)\int \cos^n x\, dx
\end{aligned}$$

Perciò:

$$n\int \cos^n x\, dx = \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\, dx$$

Quindi:

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx \tag{1}$$

Con questa formula, si riduce dalla n-esima potenza alla $(n-2)$-esima, arrivando, dopo qualche passo alla primitiva o di $1 = \cos^0 x$, o di $\cos x = \cos^1 x$.

Ad esempio:

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{2-1}{2}\int \cos^0 x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{2}x$$
$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{3-1}{3}\int \cos^1 x\, dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} x \cos^2 x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} x$$
$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x \cos^3 x + \frac{4-1}{4}\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} x \cos^3 x + \frac{3}{8}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{3}{8}x$$

Si può affrontare anche potenze negative del coseno. Sostituendo $-n$ per n in (1) si ottiene:

$$\int \cos^{-n} x\,dx = \frac{1}{-n}\operatorname{sen} x \cos^{-n-1} x + \frac{-n-1}{-n}\int \cos^{-n-2} x\,dx$$

Si risolve per $\int \cos^{-n-2} x\,dx$:

$$\int \cos^{-n-2} x\,dx = \frac{1}{n+1}\operatorname{sen} x \cos^{-n-1} x + \frac{n}{n+1}\int \cos^{-n} x\,dx$$

Finalmente, si sostituisce $n = m-2$:

$$\int \cos^{-m} x\,dx = \frac{1}{m-1}\operatorname{sen} x \cos^{-m+1} x + \frac{m-2}{m-1}\int \cos^{-m+2} x\,dx$$

Cioè:

$$\int \sec^{m} x\,dx = \frac{1}{m-1}\operatorname{tg} x \sec^{m-2} x + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} x\,dx \tag{2}$$

Con questa formula, si riduce dalla m-esima potenza alla $(m-2)$-esima, arrivando, dopo qualche passo alla primitiva o di $1 = \sec^0 x$, o di $\sec x = \sec^1 x$.

La primitiva del secante si fa con una piccola astuzia, e con la sostituzione $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$:

$$\begin{aligned}
\int \sec x\,dx &= \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1-u^2}\,du \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right) du = \frac{1}{2}(\log(1+u) - \log(1-u)) \\
&= \frac{1}{2}\big(\log\frac{1+u}{1-u}\big) = \frac{1}{2}\big(\log\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\big) = \frac{1}{2}(\log\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{1-\operatorname{sen}^2 x}) \\
&= \frac{1}{2}\big(\log\frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x}\big) = \log\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x} = \log(\sec x + \operatorname{tg} x)
\end{aligned} \tag{3}$$

1. Usare (1) per calcolare le primitive di $\cos^5 x$ e $\cos^6 x$.

2. Usare (2) per calcolare le primitive di $\sec^2 x$, $\sec^3 x$, $\dots$, $\sec^7 x$.

3. Ripetere tutti questi calcoli con il seno, il cosecante, e la cotangente al posto del coseno, del secante, e della tangente rispettivamente.