Matematica 2, Steger — Le Primitive delle Funzioni Razionali I

Una *funzione razionale* è il rapporto fra due polinomi, ad esempio $f(x) = (x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 1)/(x^4 - x^2 + 1)$. È sempre possibile calcolare la primitiva di una funzione razionale. Effettivamente, è sempre possibile scrivere una qualsiasi funzione razionale come la somma, con coefficienti costanti, di funzioni relativamente semplici. Le funzioni relativamente semplici da usare sono:

		x^n	per $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
$\dfrac{1}{Ax+B}$	e	$\dfrac{1}{(Ax+B)^n}$	per $A \neq 0$, $n = 2, 3, 4, \dots$
$\dfrac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}$	e	$\dfrac{2Ax+B}{(Ax^2+Bx+C)^n}$	per $B^2 - 4AC < 0$, $n = 2, 3, 4, \dots$
$\dfrac{1}{Ax^2+Bx+C}$	e	$\dfrac{1}{(Ax^2+Bx+C)^n}$	per $B^2 - 4AC < 0$, $n = 2, 3, 4, \dots$

Ecco le primitive di tutte queste funzioni relativamente semplici, tranne le ultime due.

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\int \frac{1}{Ax+B} \, dx = \frac{1}{A} \log(Ax+B)$$

$$\int \frac{1}{(Ax+B)^n} \, dx = \frac{-1}{A(n-1)} \frac{1}{(Ax+B)^{n-1}}$$

$$\int \frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C} \, dx = \log(Ax^2+Bx+C)$$

$$\int \frac{2Ax+B}{(Ax^2+Bx+C)^n} \, dx = \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(Ax^2+Bx+C)^{n-1}}$$

1. Controllare la validità delle primitive sopra.

2. Calcolare le primitive di

1	x	x^2	x^6
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{5x-7}$	$\dfrac{1}{x^4}$	$\dfrac{1}{(5x-7)^2}$
$\dfrac{2x}{x^2+4}$	$\dfrac{2x}{(x^2+4)^4}$	$\dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}$	$\dfrac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}$

Per le ultime due funzioni relativamente semplici, si usa l'identità $\operatorname{tg}^2 t + 1 = \sec^2 t$ insieme con l'algebra.

$$
\begin{aligned}
Ax^2 + Bx + C &= A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) \\
&= A\left((x + \frac{B}{2A})^2 - \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A}\right) = A\left((x + \frac{B}{2A})^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2}\right)
\end{aligned}
$$

La seguente sostituzione:

$$
x + \frac{B}{2A} = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} \operatorname{tg} t \qquad\qquad dx = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} \sec^2 t \, dt
$$

mette in gioco l'espressione $\operatorname{tg}^2 t + 1$:

$$
\begin{aligned}
Ax^2 + Bx + C &= A\left(\left(\frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} \operatorname{tg} t\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A^2}\right) \\
&= A\left(\frac{4AC - B^2}{4A^2} (\operatorname{tg}^2 t + 1)\right) = \frac{4AC - B^2}{4A} \sec^2 t
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{Ax^2 + Bx + C} \, dx &= \int \frac{4A}{4AC - B^2} \frac{1}{\sec^2 t} \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} \sec^2 t \, dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} \int 1 \, dt = \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(Ax^2 + Bx + C)^2} \, dx &= \int \frac{(4A)^2}{(4AC - B^2)^2} \frac{1}{\sec^4 t} \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} \sec^2 t \, dt \\
&= \frac{8A}{(4AC - B^2)^{3/2}} \int \cos^2 t \, dt = \frac{8A}{(4AC - B^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{1}{2} t\right)
\end{aligned}
$$

3. Svolgere i calcoli corrispondenti per:

$$
\int \frac{1}{(Ax^2 + Bx + C)^3} \, dx \qquad \text{e} \qquad \int \frac{1}{(Ax^2 + Bx + C)^4} \, dx
$$

Risposte:

$$
\frac{32A^2}{(4AC - B^2)^{5/2}} \left(\frac{1}{4} \operatorname{sen} t \cos^3 t + \frac{3}{8} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{3}{8} t\right)
$$

e

$$
\frac{128A^3}{(4AC - B^2)^{7/2}} \left(\frac{1}{6} \operatorname{sen} t \cos^5 t + \frac{5}{24} \operatorname{sen} t \cos^3 t + \frac{5}{16} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{5}{16} t\right)
$$

Occorre esprimere questi esiti in termini di x invece di t.

$$x + \frac{B}{2A} = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2A} \operatorname{tg} t$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{2A}{\sqrt{4AC - B^2}} \Big(x + \frac{B}{2A} \Big) = \frac{2Ax + B}{\sqrt{4AC - B^2}} \qquad t = \operatorname{arctg}\left(\frac{2Ax + B}{\sqrt{4AC - B^2}} \right)$$

$$\sec^2 t = \frac{4A^2x^2 + 4ABx + B^2}{4AC - B^2} + 1 = \frac{4A^2x^2 + 4ABx + 4AC}{4AC - B^2} = \frac{4A}{4AC - B^2}(Ax^2 + Bx + C)$$

$$\cos t = \frac{1}{\sec t} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 t}} = \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}$$

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{tg} t \cos t = \frac{2Ax + B}{\sqrt{4AC - B^2}} \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{2\sqrt{A}} \frac{1}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = \frac{1}{2\sqrt{A}} \frac{2Ax + B}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}$$

Quindi

$$\int \frac{1}{Ax^2 + Bx + C}\, dx = \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} t = \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2Ax + B}{\sqrt{4AC - B^2}} \right)$$

$$\int \frac{1}{(Ax^2 + Bx + C)^2}\, dx = \frac{8A}{(4AC - B^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{1}{2} t \right)$$
$$= \frac{8A}{(4AC - B^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\sqrt{4AC - B^2}}{4A} \frac{2Ax + B}{Ax^2 + Bx + C} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2Ax + B}{\sqrt{4AC - B^2}} \right) \right)$$
$$= \frac{1}{(4AC - B^2)} \frac{2Ax + B}{Ax^2 + Bx + C} + \frac{4A}{(4AC - B^2)^{3/2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2Ax + B}{\sqrt{4AC - B^2}} \right)$$

4. Svolgere i calcoli corrispondenti per:

$$\int \frac{1}{(Ax^2 + Bx + C)^3}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int \frac{1}{(Ax^2 + Bx + C)^4}\, dx$$

Mettendo $\Delta = 4AC - B^2$, le risposte sono:

$$\frac{1}{2\Delta} \frac{2Ax + B}{(Ax^2 + Bx + C)^2} \quad + \quad \frac{3A}{\Delta^2} \frac{2Ax + B}{(Ax^2 + Bx + C)} \quad + \quad \frac{12A^2}{\Delta^{5/2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2Ax + B}{\sqrt{\Delta}} \right)$$

e

$$\frac{1}{3\Delta} \frac{2Ax + B}{(Ax^2 + Bx + C)^3} + \frac{5A}{3\Delta^2} \frac{2Ax + B}{(Ax^2 + Bx + C)^2}$$
$$+ \frac{10A^2}{\Delta^3} \frac{2Ax + B}{(Ax^2 + Bx + C)} + \frac{40A^3}{\Delta^{7/2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2Ax + B}{\sqrt{\Delta}} \right)$$

5. Usare le formule calcolate sopra e calcolare:

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+25}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x^2+25)^2}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x^2+25)^3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx \qquad \int \frac{1}{(x^2+4x+5)^3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{5x^2+4x+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{(5x^2+4x+1)^2}\,dx \qquad \int \frac{1}{(5x^2+4x+1)^3}\,dx$$