DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 6 febbraio 2024

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

A. Per parametri costanti a, b, e c calcolare:

$$\int \frac{y^2}{(y-a)(y-b)(y-c)}\,dy$$

B. Sia $R > 0$ un parametro fisso. Sia $\mathcal{D}$ il disco determinato dalla condizione:

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

Usare le coordinate polari e calcolare la media di $(x+R)^3$ su $\mathcal{D}$.

C. Sia $R > 0$ un parametro fisso. Sia $\mathcal{O}$ l'ottava parte della sfera determinata da:

$$x, y, z \geq 0 \qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

Usare le coordinate *cilindriche* e calcolare:

$$\iiint_{\mathcal{O}} z^3 \, dV$$

D. Sia k un parametro fisso. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} p + kq &= 0 \\ kp + q + kr &= 0 \\ kq + r &= 1 \end{aligned}$$

per le incognite p, q, e r in termini del parametro k. (Indicazione: alla fine si trova $1 - 2k^2$ nei denominatori.)

1/8

$\boxed{A}$ $$\frac{y^2}{(y-a)(y-b)(y-c)} = \frac{D}{y-a} + \frac{E}{y-b} + \frac{F}{y-c}$$

grado=2

grado=3

$$y^2 = D(y-b)(y-c) + E(y-a)(y-c) + F(y-a)(y-b)$$

$$y = a \rightsquigarrow a^2 = D(a-b)(a-c) + 0 + 0$$

$$\rightsquigarrow D = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$y = b \rightsquigarrow E = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)}$$

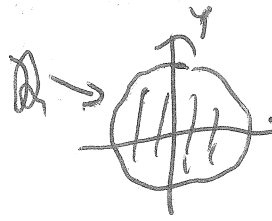
$$y = c \rightsquigarrow F = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$\int \frac{D}{y-a} + \frac{E}{y-b} + \frac{F}{y-c}\, dy = D\log(y-a) + E\log(y-b) + F\log(y-c)$$

$$= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \log(y-a) + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} \log(y-b) + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \log(y-c)$$

[B] $-\pi \le \theta \le \pi, \quad m \ge 0$

$x^2+y^2 \le R^2 \rightarrow m^2 \le R^2 \rightarrow m \le R$



$$\iint_{\Omega} I \, dA = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{m=0}^{R} I \cdot m \, dm \right) d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

$$\iint_{\Omega} (x+R)^3 \, dA = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{m=0}^{R} (m\cos\theta + R)^3 m \, dm \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{m=0}^{R} (m^3\cos^3\theta + 3Rm^2\cos^2\theta + 3R^2 m\cos\theta + R^3) m \, dm \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos^3\theta \left(\int_{m=0}^{R} m^4 \, dm \right) d\theta$$

$$+ 3R \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos^2\theta \left(\int_{m=0}^{R} m^3 \, dm \right) d\theta$$

$$+ 3R^2 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos\theta \left(\int_{m=0}^{R} m^2 \, dm \right) d\theta$$

$$+ R^3 \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{m=0}^{R} m \, dm \right) d\theta$$

$$\int_{\theta=-\pi}^{\pi} 1 \, d\theta = 2\pi$$

$$\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos\theta \, d\theta = \sin\theta \Big]_{\theta=-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \sin\theta \cos\theta \Big]_{\theta=-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} 1 \, d\theta$$

$$= 0 + \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$

$$\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos^3\theta \, d\theta = \frac{1}{3} \sin\theta \cos^2\theta \Big]_{\theta=-\pi}^{\pi} + \frac{2}{3} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \cos\theta \, d\theta$$

$$= 0 + 0 = 0$$

(4/8)

$$\iint_Q (x+R)^3 \, dA$$

$$= 0 + 3R \cdot \pi \cdot \frac{R^4}{4} + 0 + R^3 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^2}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{4}+1\right)\pi R^5 = \frac{7}{4}\pi R^5$$

$$\overline{(x+R)^3} = \frac{\iint_Q (x+R)^3 \, dA}{\iint_Q 1 \, dA}$$

$$= \frac{\frac{7}{4}\pi R^5}{\pi R^2} = \boxed{\frac{7}{4}R^3}$$

[C] $-\pi \le \theta \le \pi, \quad r \ge 0$

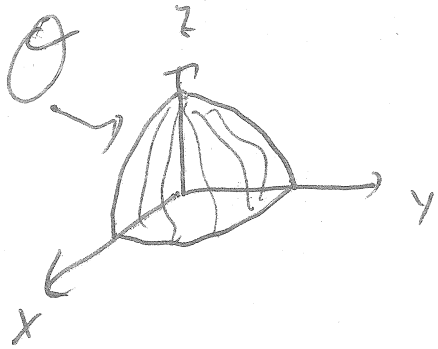
$$\begin{Bmatrix} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} r\cos\theta \ge 0 \\ r\sin\theta \ge 0 \end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix} \cos\theta \ge 0 \\ \sin\theta \ge 0 \end{Bmatrix}$$

$$\to 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$x^2+y^2+z^2 \le R^2 \to r^2+z^2 \le R^2$$

$$\to z^2 \le R^2 - r^2 \to z \le \sqrt{R^2-r^2}$$

$$R^2 - r^2 \ge 0 \to r^2 \le R^2 \to r \le R$$



$$\iiint_{\Omega} z^3 \, dV$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{R} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}} z^3 \, r \, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{R} r \left[\frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}} dr \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{R} r \left(R^2-r^2\right)^2 dr \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^{R} r \left(R^4 - 2R^2r^2 + r^4\right) dr$$

$$= \frac{\pi}{8} \left(\frac{R^2}{2} \cdot R^4 - \frac{R^4}{4} 2R^2 + \frac{R^6}{6} \right)$$

$$= \frac{\pi}{8} R^6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{8} R^6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \boxed{\frac{\pi R^6}{48}}$$

[D]

p	q	n = constante
1	k	0
k	1	k
0	k	1

$E_2 \leftarrow E_2 - k \cdot E_1$

1	k	0	0
0	$1-k^2$	k	0
0	k	1	1

$E_2 \leftarrow \frac{1}{1-k^2} E_2$

1	k	0	0
0	1	$k/1-k^2$	0
0	k	1	1

7/8

$E1 \leftarrow E1 - k \cdot E2$
$E3 \leftarrow E3 - k \cdot E2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k^2/(1-k^2) & 0 \\ 0 & 1 & k/(1-k^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2/(1-k^2) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[1 - \frac{k^2}{1-k^2} = \frac{1-k^2-k^2}{1-k^2} \cdots \frac{1-2k^2}{1-k^2} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k^2/(1-k^2) & 0 \\ 0 & 1 & k/(1-k^2) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2k^2)/(1-k^2) & 1 \end{pmatrix}$$

$E3 \leftarrow \frac{1-k^2}{1-2k^2} \cdot E3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k^2/(1-k^2) & 0 \\ 0 & 1 & k/(1-k^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-k^2}{1-2k^2} \end{pmatrix}$$

8/8

$E1 \leftarrow E1 + \frac{k^2}{1-k^2} \cdot E3$

$E2 \leftarrow E2 - \frac{k}{1-k^2} E3$

p	q	m	= cost.
(1)	0	0	$k^2/(1-2k^2)$
0	(1)	0	$-k/(1-2k^2)$
0	0	(1)	$(1-k^2)/(1-2k^2)$

$p = k^2/(1-2k^2)$

$q = -k/(1-2k^2)$

$m = (1-k^2)/(1-2k^2)$

Controllo:

$$p + kq = \frac{k^2}{1-2k^2} - \frac{k^2}{1-2k^2} = 0 \quad (\checkmark)$$

$$kp + q + km = \frac{k^3}{1-2k^2} + \frac{-k}{1-2k^2} + \frac{k-k^3}{1-2k^2}$$

$$= 0 \quad (\checkmark)$$

$$kq + m = \frac{-k^2}{1-2k^2} + \frac{1-k^2}{1-2k^2} = \frac{1-2k^2}{1-2k^2} = 1 \quad (\checkmark)$$