DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 24 novembre 2023

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 13.00 alle ore 13.30. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad\qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

A. Calcolare:

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

1. con la sostituzione $u = \mathrm{tg}\,\theta$, e poi
2. con la sostituzione $u = 1/v$ seguita da una sostituzione trigometrica.
3. Se le due risposte si chiamano $A_1(u)$ e $A_2(u)$ deve valere $A_2(u) = A_1(u) + C$. Calcolare la costante C. (Indicazione: valutare per $u = 1$.)

B. Sia $R > 0$ un parametro fisso. Usare le coordinate cilindriche e calcolare

$$\iiint_{\substack{x,y,z\geq 0 \\ x^2+y^2+z^2\leq R^2}} xyz\,dV$$

Poi fare uno schizzo del volume d'integrazione.

C. Sia ancora $R > 0$ un parametro fisso. Si lavora in 4 dimensione dove le coordinate si chiameranno w, x, y, e z. Si usa anche questa forma delle coordinate sferiche, che si chiamano r, θ_1, θ_2, e ϕ.

$$\begin{aligned} w &= r \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\phi \\ x &= r \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\phi \\ y &= r \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 \\ z &= r \cos\theta_1 \\ dw\,dx\,dy\,dz = dV_4 &= r^3 \operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2\, dr\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\phi \end{aligned}$$

(dV_4 è l'elemento di volume 4-dimensionale.) I limiti che si usano sempre per le quattro "coordinate sferiche" sono

$$r \geq 0 \qquad 0 \leq \theta_1 \leq \pi \qquad 0 \leq \theta_2 \leq \pi \qquad -\pi \leq \phi \leq \pi$$

1. Calcolare $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ in termini di r, θ_1, θ_2, e ϕ. (Indicazione: ci sono calcoli simili per le coordinate polari e per le solite coordinate sferiche. Questo calcolo è in forte analogia con quelli.)

2. Usare queste coordinate e le formule sopra per calcolare il 4-volume della sfera 4-dimensionale con questo integale quadruplo:

$$\int_{w^2+x^2+y^2+z^2 \leq R^2} 1\, dV_4$$

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e risolvere il sistema

$$\begin{aligned} 2p + q &= A \\ p + 2q + r &= B \\ 2q + 2r + s &= C \\ r + 2s &= D \end{aligned}$$

per p, q, r, e s in termini di A, B, C, e D.

(Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, i soli denominatori che appaiono sono "2", "3", "4" e qualche volta "6" nei calcoli intermedi. Nella risposta finale non ci sono denominatori.)

A

(1)

$u = \operatorname{tg}\theta$

$u^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$du = \sec^2\theta \, d\theta$

$\theta = \operatorname{arctg} u$

$$\int \frac{1}{1+u^2} du = \int \frac{1}{\sec^2\theta} \cdot \sec^2\theta \, d\theta = \int 1 \, d\theta$$

$$= \theta = \operatorname{arctg} u$$

(2)

$u = \frac{1}{v}$

$v = \frac{1}{u}$

$du = -\frac{1}{v^2} dv$

$$\int \frac{1}{1+u^2} du$$

$$= \int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{v}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{v^2}\right) dv$$

$$= -\int \frac{1}{v^2+1} dv$$

$= -\operatorname{arctg}(v)$ come di sopra

$= -\operatorname{arctg}(1/u)$

(3) $A_1(u) = \operatorname{arctg}(u)$ $\quad A_2(u) = -\operatorname{arctg}(1/u)$

$$-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{u}\right) = \operatorname{arctg}(u) + C$$

$$\hookrightarrow \quad C = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{u}\right) - \operatorname{arctg}(u)$$

Si mette $u = 1$

$$C = -\operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(1)$$

$$= -\pi/4 - \pi/4 = \boxed{-\pi/2}$$

Oppure si pretende che $u \to +\infty$

$$C = \lim_{u \to +\infty} -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{u}\right) - \lim_{u \to +\infty} \operatorname{arctg}(u)$$

$$= -\operatorname{arctg}(0) - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = \boxed{-\frac{\pi}{2}}$$

Oppure si mette $u = \sqrt{3}$

Anzi $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}(\pi/6)/\cos(\pi/6)$

$$= (1/2)/(\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}(\pi/3)/\cos(\pi/3)$$

$$= (\sqrt{3}/2)/(1/2) = \sqrt{3}$$

3/9

$$C = -\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \boxed{\frac{-\pi}{2}}$$

B $\quad x \geq 0 \to \rho\cos\theta \geq 0 \to \cos\theta \geq 0$
$\quad y \geq 0 \to \rho\sin\theta \geq 0 \to \sin\theta \geq 0$

$$\hookrightarrow \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \rightsquigarrow \rho^2 + z^2 \leq R^2$$

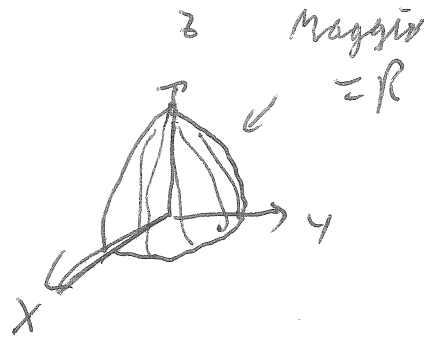
$$\to \quad z^2 \leq R^2 - \rho^2$$

$$\to \quad 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

e poiché l'intervallo per z ha senso ottenere $\rho \leq R$,

$$0 \leq \rho \leq R$$

$$\iiint_{\substack{x,y,z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2}} xyz \, d\nabla$$



4/9

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{R} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}} (r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta)\, z \cdot r \, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \int_{r=0}^{R} r^3 \left(\int_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}} z \, dz \right) dr \, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \left(\int_{r=0}^{R} r^3 \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{R^2-r^2}\right)^2 dr \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \left(\int_{r=0}^{R} r^3 (R^2 - r^2)\, dr \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \left(\frac{1}{4} R^4 \cdot R^2 - \frac{1}{6} R^6 \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) R^6 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot R^6 \cdot \frac{(\operatorname{sen}\theta)^2}{2} \Big]_{\theta=0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot R^6 \cdot \frac{1}{2} \left(1^2 - 0^2 \right) = \boxed{\frac{1}{48} R^6}$$

5/9

C

① $w^2+x^2 = (r \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi)^2 + (r \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi)^2$

$= r^2 \operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}^2\theta_2 (\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)$

$= r^2 \operatorname{sen}^2\theta_1 \cdot \operatorname{sen}^2\theta_2$

$w^2+x^2+y^2 = r^2 \operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}^2\theta_2 + (r \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2)^2$

$= r^2 \operatorname{sen}^2\theta_1 (\operatorname{sen}^2\theta_2 + \cos^2\theta_2)$

$= r^2 \operatorname{sen}^2\theta_1$

$w^2+x^2+y^2+z^2 = r^2 \operatorname{sen}^2\theta_1 + (r\cos\theta_1)^2$

$= r^2(\operatorname{sen}^2\theta_1 + \cos^2\theta_1)$

$= r^2$

② $w^2+x^2+y^2+z^2 \subseteq \mathbb{R}^2$

$\hookrightarrow r^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow 0 \subseteq r \subseteq \mathbb{R}$

6/9

$$\iiint_{w^2+x^2+y^2+z^2 \le R^2} 1 \, dV_4$$

$$= \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\theta_2=0}^{\pi} \left(\int_{\theta_1=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{R} 1 \cdot r^3 \operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \, dr \right) d\theta_1 \right) d\theta_2 \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\theta_2=0}^{\pi} \operatorname{sen}\theta_2 \left(\int_{\theta_1=0}^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta_1 \left(\int_{r=0}^{R} r^3 \, dr \right) d\theta_1 \right) d\theta_2 \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \left(\int_{\theta_2=0}^{\pi} \operatorname{sen}\theta_2 \left(\int_{\theta_1=0}^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta_1 \cdot \frac{R^4}{4} \, d\theta_1 \right) d\theta_2 \right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} \left(\int_{\theta_2=0}^{\pi} \operatorname{sen}\theta_2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \boxed{\frac{\pi^2 R^4}{2}}$$

(7/9)

[1]

p	q	r	s	=	A	B	C	D
②	1	0	0		1	0	0	0
	2	1	0		0	1	0	0
1	2	1	0		0	1		0
0	2	2	1		0	0	1	
0	0	1	2		0	0	0	1

E1 ← E1/2 →

①	1/2	0	0	1/2	0	0	0
1	2	1	0	0	1	0	0
0	2	2	1	0	0	1	0
0	0	1	2	0	0	0	1

E2 ← E2-E1 →

①	1/2	0	0	1/2	0	0	0
0	③/2	1	0	-1/2	1	0	0
0	2	2	1	0	0	1	0
0	0	1	2	0	0	0	1

E2 ← 2/3 - E2 →

①	1/2	0	0	+/2	0	0	0
0	①	2/3	0	-1/3	2/3	0	0
0	2	2	1	0	0	1	0
0	0	1	2	0	0	0	1

8/9

$E_1 \leftarrow E_1 - \frac{1}{2}E_2$

$E_3 \leftarrow E_3 - 2E_2$

$$\begin{matrix} (1) & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2/3) & 1 & 2/3 & -4/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$E_3 \leftarrow \frac{3}{2}E_3$

$$\begin{matrix} (1) & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 3/2 & 1 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$E_1 \leftarrow E_1 + 1/3\,E_3$

$E_2 \leftarrow E_2 - 2/3\,E_3$

$E_4 \leftarrow E_4 - E_3$

$$\begin{matrix} (1) & 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & (1) & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 3/2 & 1 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/2) & -1 & 2 & -3/2 & 1 \end{matrix}$$

$E_4 \leftarrow 2 \cdot E_4$

$$\begin{matrix} (1) & 0 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & (1) & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (1) & 3/2 & 1 & -2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1) & -2 & 4 & -3 & 2 \end{matrix}$$

9/9

	p	q	r	s	= A	B	C	D
$E1 \leftarrow E1 - \frac{1}{2} E_4$	(1)	0	0	0	2	−3	2	−1
$E2 \leftarrow E_2 + E_4$	0	(1)	0	0	−3	6	−4	2
$E3 \leftarrow E_3 - \frac{3}{2} E_4$	0	0	(1)	0	4	−8	6	−3
	0	0	0	(1)	−2	4	−3	2

~~Controllo (3° equazione)~~

$p = 2A - 3B + 2C - D$

$q = -3A + 6B - 4C + 2D$

$r = 4A - 8B + 6C - 3D$

$s = -2A + 4B - 3C + 2D$

Controllo (3° equazione)

$2q + 2r + s = 2(-3A + 6B - 4C + 2D)$

$+ 2(4A - 8B + 6C - 3D)$

$+ (-2A + 4B - 3C + 2D)$

$= 0A + 0B + 1C + 0D = C$ ✓

e poi le altre equazioni.