



Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 28 settembre 2023

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici*. È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi & y &= r \sin \theta \sin \phi & z &= r \cos \theta \\dx dy dz &= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi\end{aligned}$$

A. Usare la sostituzione $x = \sin \theta$ e calcolare

$$\int \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta$$

B. Sia $\mathcal{T}$ il triangolo con vertici $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, e $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$. Fare uno schizzo di $\mathcal{T}$. Poi usare le coordinate rettangolare (x e y) e calcolare la media di xy su $\mathcal{T}$.

C. Siano $R > 0$ un parametro fisso.. Usare le coordinate sferiche e calcolare il volume della forma $\mathcal{E}$ definito da

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \qquad x \leq y$$

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e risolvere il sistema

$$p + q + r + s = 0$$

$$p + 2q + 3r + 4s = 0$$

$$p + 4q + 9r + 16s = 1$$

$$p + 8q + 27r + 64s = 3$$

(Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, il solo denominatore che appare è “2”.)

1/8

A

$$x = \sin \theta$$

$$dx = \cos \theta d\theta$$

$$\cos^4 \theta = (\cos^2 \theta)^2 = (1 - \sin^2 \theta)^2 = (1 - x^2)^2$$

$$\int \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \int \frac{1}{(1-x^2)^2} dx$$

$$(1-x^2)^2 = ((1-x)(1+x))^2 = (1-x)^2(1+x)^2$$

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2}$$

$$1 = A(1-x)(1+x)^2 + B(1+x)^2 + C(1+x)(1-x)^2 + D(1-x)^2$$

$$x=1 \rightarrow 1 = 0 + B(1+1)^2 + 0 + 0$$

$$\rightarrow 1 = 4B \rightarrow B = 1/4$$

$$x=-1 \rightarrow 1 = 0 + 0 + 0 + D(1-(-1))^2$$

$$\rightarrow 1 = 4D \rightarrow D = 1/4$$

2/8

$$1 = A(1+x-x^2-x^3) + \frac{1}{4}(1+2x+x^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + C(1-x-x^2+x^3) \\ + \frac{1}{4}(1-2x+x^2) \end{array} \right.$$

$$\rightarrow A + \frac{1}{4} + C + \frac{1}{4} = 1$$

$$A + C = 1/2$$

$$A + \frac{1}{2} - C - \frac{1}{2} = 0 \leadsto$$

$$A - C = 0$$

$$-A + \frac{1}{4} - C + \frac{1}{4} = 0$$

$$-A - C = -1/2$$

$$-A + C = 0$$

$$-A + C = 0$$

$$\rightarrow A = C$$

$$A + C = \frac{1}{2} \leadsto A = C = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{1}{(1-x^2)^2} dx = \int \frac{1}{4} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\log(1-x) + \frac{1}{1-x} + \log(1+x) - \frac{1}{1+x} \right)$$

3/8

$$= \left(\frac{1}{4} \left(-\log(1-\sin\theta) + \frac{1}{1-\sin\theta} + \log(1+\sin\theta) - \frac{1}{1+\sin\theta} \right) \right)$$

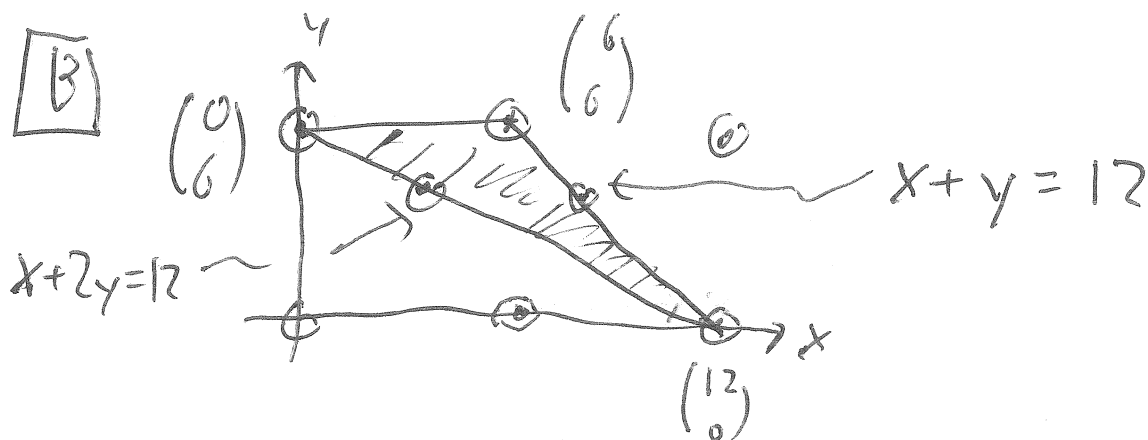
$$= \frac{1}{4} \left(\log \left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} \right) + \frac{2\sin\theta}{1-\sin^2\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\log \left(\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} \right) + \frac{2\sin\theta}{1-\sin^2\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\log \left(\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} \right) + \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\log \left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \right) + \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\log(\tan\theta + \sec\theta) + \tan\theta \cdot \sec\theta \right)$$



4/8

$$\iint_{\mathcal{R}} 1 \, dA = \int_{y=0}^6 \left(\int_{x=12-2y}^{12-y} 1 \, dx \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^6 y \, dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^6 = \frac{36}{2} = 18$$

$$\iint_{\mathcal{R}} xy \, dA = \int_{y=0}^6 \left(\int_{x=12-2y}^{12-y} xy \, dx \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^6 \left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=12-2y}^{12-y} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{y=0}^6 (144 - 24y + y^2 - 144 + 48y - 4y^2) y \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{y=0}^6 (24y - 3y^2) y \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[24 \cdot \frac{y^3}{3} - 3 \cdot \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^6$$

$$= \frac{1}{2} \left[24 \cdot \frac{6^3}{3} - 3 \cdot \frac{6^4}{4} \right]$$

5/8

$$= \frac{1}{2} \left[2^3 \cdot 3 \cdot \frac{2^3 \cdot 3^3}{3} - 3 \cdot \frac{2^4 \cdot 3^4}{2^2} \right]$$

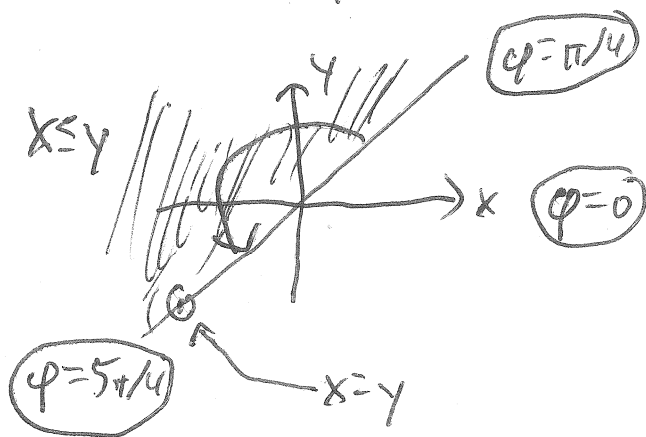
$$= 2^6 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^5 = 2 \cdot 3^3 (2^4 - 3^2)$$

$$= 2 \cdot 27 \cdot (16 - 9) = 54 \cdot 7 = 378$$

$$\hookrightarrow = 18 \cdot 3 \cdot 7 = 18 \cdot 21$$

$$\overline{xy} = \frac{\iint_{\mathcal{R}} xy \, dA}{\iint_{\mathcal{R}} 1 \, dA} = \frac{18 \cdot 21}{18} = 21$$

$$[C] \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \rightarrow M^2 \leq R^2 \rightarrow M \leq R$$



$$\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\iiint_{\mathcal{E}} 1 \, dV = \int_{\varphi=\pi/4}^{5\pi/4} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{M=0}^R M^2 \sin \theta \, dM \right) d\theta \right) d\varphi$$

6/8

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{5\pi/4} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R^3}{3} \cos\theta \cdot d\theta \right) d\varphi$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \cos\theta \cdot d\theta = -\cos\theta \Big|_{\theta=0}^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$$

$$= \int_{\varphi=\pi/4}^{5\pi/4} \frac{2R^3}{3} d\varphi = \frac{2R^3}{3} (\pi) = \frac{2\pi R^3}{3}$$

D1

p	q	r	s	=
1	1	1	1	0
1	2	3	4	0
1	4	9	16	1
1	8	27	64	3

$E2 \leftarrow E2 - E1$

$E3 \leftarrow E3 - E1$

$E4 \leftarrow E4 - E1$

1	1	1	1	0
0	1	2	3	0
0	3	8	15	1
0	7	26	63	3

7/8

$$\begin{aligned} E1 &\leftarrow E1 - E2 \\ \hline E3 &\leftarrow E3 - 3E2 \\ E4 &\leftarrow E4 - 7E2 \end{aligned}$$

①	0	-1	-2	0
0	①	2	3	0
0	0	②	6	1
0	0	12	42	3

$$E3 \leftarrow \frac{1}{2} E3$$

①	0	-1	-2	0
0	①	2	3	0
0	0	①	3	1/2
0	0	12	42	3

$$\begin{aligned} E1 &\leftarrow E1 + E3 \\ \hline E2 &\leftarrow E2 - 2E3 \\ E4 &\leftarrow E4 - 12E3 \end{aligned}$$

①	0	0	1	1/2
0	①	0	-3	-1
0	0	①	3	1/2
0	0	0	⑥	-3

$$E4 \leftarrow \frac{1}{6} E4$$

①	0	0	1	1/2
0	①	0	-3	-1
0	0	①	3	1/2
0	0	①	①	-1/2

$$\begin{aligned} E1 &\leftarrow E1 - E4 \\ \hline E2 &\leftarrow E2 + 3E4 \\ E3 &\leftarrow E3 - 3E4 \end{aligned}$$

	b	q	M	S	=
①	0	0	0	1	
0	①	0	0	-9/2	
0	0	①	0	2	
0	0	0	①	-1/2	

8/8

$$p = 1$$

$$q = -5/2$$

$$r = 2$$

$$s = -1/2$$

$$\text{Controllo: } p+q+r+s = 1 - \frac{5}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 3 - 3 = 0 \quad (\checkmark)$$

$$p+2q+3r+4s = 1 - 5 + 6 - 2 = 7 - 7 = 0 \quad (\checkmark)$$

$$p+4q+9r+16s = 1 - 10 + 18 - 8 = 19 - 18 = 1 \quad (\checkmark)$$

$$p+8q+27r+64s = 1 - 20 + 54 - 32 = 55 - 52 = 3 \quad (\checkmark)$$