DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 11 settembre 2023

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate polari sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

A. Usare la sostituzione $v = u^2$ e calcolare

$$\int \frac{u^5}{u^4 - 5u^2 + 6}\,du$$

B. Sia R un parametro fisso con valore positivo. Sia $\mathcal{Q}$ la zona definita da

$$x^2 + y^2 \le R^2 \qquad y \ge 0 \qquad |x| \le y$$

Questa zona è la quarta parte di un disco. Fare uno schizzo di $\mathcal{Q}$ e poi calcolare la media di x^2y su $\mathcal{Q}$ con l'uso delle coordinate polari.

C. Siano k e A parametri fissi con valori positivi. Usare le coordinate sferiche e calcolare il volume del cono $\mathcal{C}$ definito da

$$0 \le z \le A \qquad x^2 + y^2 \le k^2z^2$$

Inoltre calcolare il raggio del disco che è il "soffitto" di $\mathcal{C}$.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e risolvere il sistema

$$\begin{aligned} x_1 \quad &+ Bx_2 \quad = y_1 \\ Cx_1 \quad &+ Dx_2 \quad = y_2 \end{aligned}$$

per x_1 e x_2 in termini di y_1 e y_2 e dei coefficienti B, C, e D.

$\boxed{A}$ $v = u^2$ $dv = 2u\,du$

$u\,du = \frac{1}{2}dv$

$$\int \frac{u^5}{u^4-5u^2+6}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{v^2}{v^2-5v+6}\,dv$$

$$\begin{array}{l|l} v^2 & v^2-5v+6 \\ \hline v^2-5v+6 & 1 \\ \cline{1-1} \quad 5v-6 & \end{array}$$

$$\rightarrow v^2 = 1\cdot(v^2-5v+6)+5v-6 \rightarrow \frac{v^2}{v^2-5v+6} = 1 + \frac{5v-6}{v^2-5v+6}$$

$$\frac{5v-6}{v^2-5v+6} = \frac{5v-6}{(v-2)(v-3)} = \frac{A}{v-2} + \frac{B}{v-3}$$

$$\hookrightarrow 5v-6 = A(v-3) + B(v-2)$$

$v=2 \to 5\cdot 2-6 = A(2-3)+0$

$\to 4 = -A \to A = -4$

$v=3 \to 5\cdot 3-6 = 0 + B(3-2)$

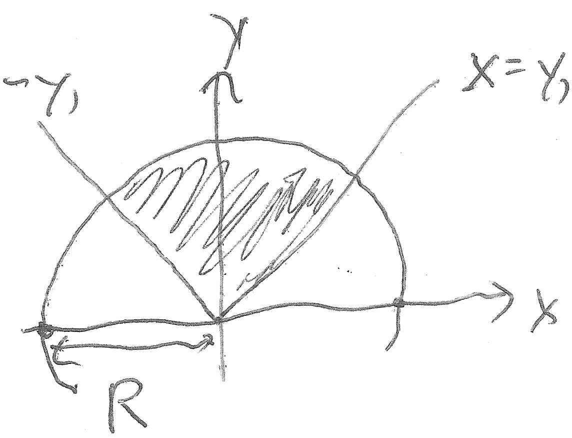
$\to 9 = B$

$$\frac{1}{2}\int \frac{v^2}{v^2-5v+6}\,dv = \frac{1}{2}\int 1 - \frac{4}{v-2} + \frac{9}{v-3}\,dv$$

$$= \frac{1}{2}v - 2\log(v-2) + \frac{9}{2}\log(v-3)$$

$$= \frac{1}{2}u^2 - 2\log(u^2-2) + \frac{9}{2}\log(u^2-3)$$

(b) $x=-y$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ $\quad x=y$, $\theta=\pi/4$



$|x| \le y \to -y \le x \le y$

$$\iint_D 1 \, dA = \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_{r=0}^{R} 1 \cdot r \, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2} R^2 \, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} R^2 = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\iint_D x^2 y \, dA$$

$$= \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_{r=0}^{R} (r \cos\theta)^2 \, r \operatorname{sen}\theta \cdot r \, dr \right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \left(\int_{r=0}^{R} r^4 \, dr \right) d\theta$$

$$= \frac{R^5}{5} \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{R^5}{5} \left(-\frac{\cos^3\theta}{3} \right) \Bigg]_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= \frac{R^5}{5} \cdot \frac{1}{3} \left(-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \left(-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)^3 \right.$$

$$= \frac{2R^5}{15} \cdot \frac{\sqrt{2}^3}{2^3} = \frac{2R^5}{15} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2} \cdot R^5}{30}$$

4/7

$$\overline{x^2 y} = \frac{\sqrt{2}\cdot R^5/30}{\pi R^2/4} = \frac{2\sqrt{2}\cdot R^3}{15\pi}$$

(C) $0 \le z \le A \rightsquigarrow 0 \le r\cos\theta \le A$

$0 \le r\cos\theta \rightsquigarrow 0 \le \cos\theta \rightsquigarrow \theta \le \frac{\pi}{2}$

$r\cos\theta \le A \rightsquigarrow r \le A/\cos\theta$

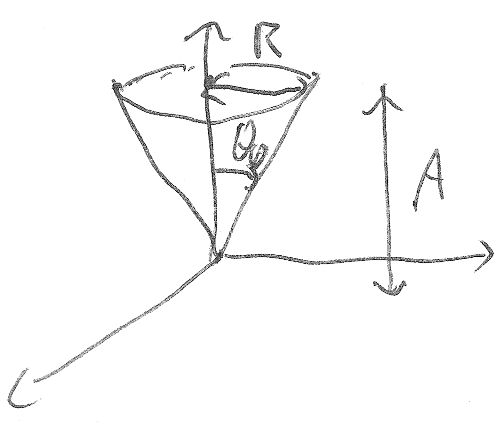
$x^2+y^2 \le k^2 z^2 \rightsquigarrow (r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi)^2 + (r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2$

$\le k^2 (r\cos\theta)^2$

$\rightsquigarrow r^2\,\mathrm{sen}^2\theta \le k^2 r^2\cos^2\theta$

$\rightsquigarrow \mathrm{sen}^2\theta \le k^2\cos^2\theta \rightsquigarrow \mathrm{sen}\,\theta \le k\cos\theta$

$\rightsquigarrow \mathrm{tg}\,\theta \le k \rightsquigarrow \theta \le \theta_0 = \mathrm{arctg}\,k$



$$\iiint_{C_e} 1\, d\bar{V} = \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\theta_0} \left(\int_{r=0}^{A/\cos\theta} 1 \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{1}{3} \left(\frac{A}{\cos\theta} \right)^3 \operatorname{sen}\theta \; d\theta$$

$$= \frac{2\pi A^3}{3} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{1}{\cos^3\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi A^3}{3} \, \frac{1}{2} \, \frac{1}{\cos^2\theta} \Bigg]_{\theta=0}^{\theta_0} = \frac{\pi A^3}{3} \left(\sec^2\theta_0 - 1 \right)$$

$$= \frac{\pi A^3}{3} \operatorname{tg}^2\theta_0 = \frac{\pi A^3 k^2}{3}$$

Si sa che questo volume vale $\frac{\pi A R^2}{3}$ dove R è il raggio del soffitto: $\frac{\pi A R^2}{3} = \frac{\pi A^3 k^2}{3} \rightsquigarrow R^2 = A^2 k^2$,

$R = kA$

O, più direttamente, il soffitto giace nel piano orizzontale dato da $z = A$. Dunque, su quel piano $x^2 + y^2 \le k^2 z^2 = k^2 A^2$, e il raggio del disco è $\boxed{R = kA}$.

D

$$\begin{array}{cc|cc} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 \\ \hline 1 & B & 1 & 0 \\ C & D & 0 & 1 \end{array}$$

$E2 = E2 - C \cdot E1$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & B & 1 & 0 \\ 0 & D-BC & -C & 1 \end{array}$$

$E2 \leftarrow \frac{1}{(D-BC)} \cdot E2$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & B & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-C}{D-BC} & \frac{1}{D-BC} \end{array}$$

$E1 \leftarrow E1 - B \cdot E2$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 + \frac{BC}{D-BC} & -B/(D-BC) \\ 0 & 1 & -C/(D-BC) & 1/(D-BC) \end{array}$$

x_1	x_2	=	y_1	y_2
1	0		$D/(D-BC)$	$-B/(D-BC)$
D	1		$-C/(D-BC)$	$1/(D-BC)$

$$x_1 = \frac{1}{D-BC}\left(D y_1 - B y_2\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{D-BC}\left(-C y_1 + y_2\right)$$

Controllo:

$$x_1 + B x_2 = \frac{1}{D-BC} \cdot \left(\begin{array}{l} D y_1 - B y_2 \\ - BC y_1 + B y_2 \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{(D-BC)} (D-BC) y_1 = y_1 \quad v$$

$$C x_1 + D x_2 = \frac{1}{D-BC} \left(\begin{array}{l} CD y_1 - CB y_2 \\ - DC y_1 + D y_2 \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{D-BC} (D-BC) y_2 = y_2 \quad v$$