DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 13 luglio 2023

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad\qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

A. Si affronta l'antiderivata più difficile che viene fuori nel calcolo delle antiderivate delle funzioni razionali. Sia $A > 0$ un parametro fisso.

1. Calcolare $\int \frac{1}{A^2+t^2}\,dt$ con la sostituzione $t = A\,\mathrm{tg}\,\theta$.
2. Trovare una formula per $\int \frac{1}{(A^2+t^2)^{n+1}}\,dt$ in termini di $\int \frac{1}{(A^2+t^2)^n}\,dt$ attraverso l'identitá
$$\frac{A^2}{(A^2+t^2)^{n+1}} = \frac{A^2+t^2}{(A^2+t^2)^{n+1}} - \frac{t^2}{(A^2+t^2)^{n+1}}$$
Si affronta il secondo termine a destra con l'integrazione per parti.
3. Calcolare $\int \frac{1}{(A^2+t^2)^3}\,dt$.

B. Siano $c > 0$ e $T > 0$ due parametri fissi. In spazio 4-dimensionali con coordinate (t, x, y, z) si consideri la forma $\mathcal{C}$ data dalle disuguaglianza:

$$0 \le t \le T \qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 \le c^2 t^2$$

Calcolare

$$\iiiint_{\mathcal{C}} 1 \, dx \, dy \, dz \, dt$$

con le coordinate sferiche attraverso la formula $dx\,dy\,dz = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$.

C. Si consideri il volume $\mathcal{B}$ data dalle disuguaglianze:

$$0 \le z \le 2 \qquad x^2 + y^2 \le z^2 \qquad x^2 + y^2 \le (2 - z)^2$$

Fare uno schizzo di $\mathcal{B}$ e usare le coordinate cilindriche per calcolare il suo volume.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e risolvere il sistema

$$\begin{array}{rrrrrrr} A & +B & +C & +D & +2E & +3F & = 0 \\ A & +2B & +3C & +D & +3E & +6F & = 0 \\ A & +4B & +9C & +D & +6E & +10F & = 0 \end{array}$$

per D, E, ed F in termini di A, B, e C. Conviene mettere le colonne per D, E, ed F prima delle colonne per A, B, e C. (Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, il solo denominatore che serve è 5.)

1/8

A ① $t = A \operatorname{tg} \theta$

$A^2 + t^2 = A^2 + A^2 \operatorname{tg}^2 \theta$

$= A^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)$

$= A^2 \sec^2 \theta$

$dt = A \sec^2 \theta \, d\theta$

$\operatorname{tg} \theta = t/A$

$\theta = \operatorname{arctg}(t/A)$

$$\int \frac{1}{A^2 + t^2} dt = \int \frac{1}{A^2 \sec^2 \theta} A \sec^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{A} \int 1 \, d\theta = \frac{1}{A} \theta$$

$$= \frac{1}{A} \operatorname{arctg}(t/A)$$

2/8

(2) $I_n = \int \frac{1}{(A^2+t^2)^n}\,dt$

$$A^2 I_{n+1} = \int \frac{A^2}{(A^2+t^2)^{n+1}}\,dt$$

$$= \int \frac{A^2+t^2}{(A^2+t^2)^{n+1}}\,dt - \int \frac{t^2}{(A^2+t^2)^{n+1}}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{(A^2+t^2)^n}\,dt - \int t \cdot \frac{t}{(A^2+t^2)^{n+1}}\,dt$$

$$= I_n - \left(t \cdot \left(\frac{-1}{2n}\right) \frac{1}{(A^2+t^2)^n} - \int 1 \cdot \left(\frac{-1}{2n}\right) \frac{1}{(A^2+t^2)^n}\,dt \right)$$

$$= I_n + \frac{t}{2n} \frac{1}{(A^2+t^2)^n} - \frac{1}{2n} I_n$$

$$= \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{t}{2n} \frac{1}{(A^2+t^2)^n}$$

3/8

$$\int \frac{1}{(t^2+A^2)^{n+1}}\,dt = I_{n+1}$$

$$= \frac{1}{A^2}\left(\frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{t}{2n}\frac{1}{(t^2+A^2)^n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{2n}\frac{t}{(t^2+A^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\right)\int \frac{1}{(t^2+A^2)^n}\,dt\right)$$

(3) $$\int \frac{1}{(t^2+A^2)^3}\,dt$$

(n=2) $$= \frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+A^2)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(t^2+A^2)^2}\,dt\right)$$

(n=1) $$= \frac{1}{4A^2}\frac{t}{(t^2+A^2)^2} + \frac{3}{4A^4}\left(\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+A^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+A^2}\,dt\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4A^2}\frac{t}{(t^2+A^2)^2} + \frac{3}{8A^4}\frac{t}{(t^2+A^2)} + \frac{3}{8A^5}\operatorname{arctg}(t/A)\right)$$

4/8

(B) $x^2+y^2+z^2 \le c^2t^2 \iff r^2 \le c^2t^2$

$\iff r \le ct$

$$\iiiint_{\substack{0\le t\le T \\ x^2+y^2+z^2\le c^2t^2}} 1 \, dx\, dy\, dz\, dt$$

$$= \int_{t=0}^{T}\left(\int_{\varphi=-\pi}^{\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=0}^{ct} 1\cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\right)d\theta\right)d\varphi\right)dt$$

$$= \int_{t=0}^{T}\left(\int_{\varphi=-\pi}^{\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{1}{3}(ct)^3\operatorname{sen}\theta\right)d\theta\right)d\varphi\Big)dt$$

$$= \frac{1}{3}c^3\int_{t=0}^{T} t^3\left(\int_{\varphi=-\pi}^{\pi}\left(\cancel{\quad} - \cos\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi}\right)d\varphi\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}c^3\int_{t=0}^{T} t^3\left(\int_{\varphi=-\pi}^{\pi} 2\, d\varphi\right)dt$$

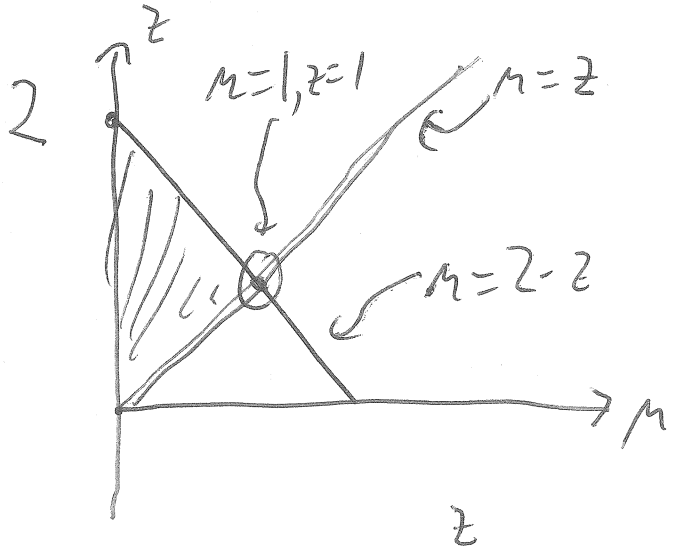
$$= \frac{1}{3}c^3\cdot 2\cdot 2\pi\cdot\int_{t=0}^{T} t^3\, dt = \boxed{\frac{\pi}{3}c^3T^4}$$

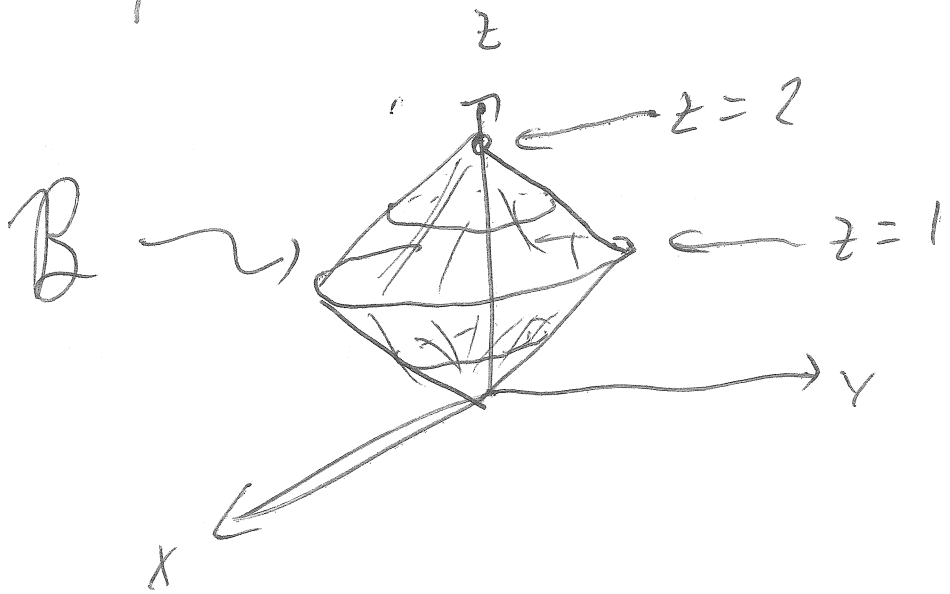
(C) In coordinate cilindriche vale $x^2+y^2=\rho^2$.

$$x^2+y^2 \le z^2 \hookleftarrow \rho^2 \le z^2 \hookleftarrow \rho \le z$$

$$x^2+y^2 \le (2-z)^2 \hookleftarrow \rho^2 \le (2-z)^2$$

$$\hookleftarrow \rho \le 2-z \hookleftarrow z \le 2-\rho$$





6/8

$$\iiint_{\mathcal{B}} 1 \, dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{1} \left(\int_{z=r}^{2-r} 1 \cdot r \, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{1} r((2-r)-r) \, dr$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{1} 2r - 2r^2 \, dr$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

D

D	E	F	=	A	B	C
(1)	2	3		-1	-1	-1
1	3	6		-1	-2	-3
1	6	10		-1	-4	-9

7/8

$E2 \leftarrow E2 - E1$

$E3 \leftarrow E3 - E1$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 7 & 0 & -3 & -8 \end{matrix}$$

$E1 \leftarrow E1 - 2E2$

$E3 \leftarrow E3 - 4E2$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$E3 \leftarrow -\frac{1}{5} E3$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \end{matrix}$$

D	E	F	=	A	B	C
1	0	0		-1	2/5	3
0	1	0		0	-3/5	-2
0	0	1		0	-1/5	0

$E1 \leftarrow E1 + 3E3$

$E2 \leftarrow E2 - 3E3$

$$D = -A + \frac{2}{5}B + 3C$$

$$E = -\frac{3}{5}B - 2C$$

$$F = -\frac{1}{5}B$$

Controllo:

$$A+B+C+D+2E+3F = A+B+C$$
$$-A+\tfrac{2}{5}B+3C$$
$$+2\left(-\tfrac{2}{5}B-2C\right)$$
$$+3\left(-\tfrac{1}{5}B\right)$$
$$= 0+0+0=0 \text{ (v)}$$

$$A+2B+3C+D+3E+6F = A+2B+3C$$
$$-A+\tfrac{2}{5}B+3C$$
$$+3\left(-\tfrac{2}{5}B-2C\right)$$
$$+6\left(-\tfrac{1}{5}B\right)$$
$$= 0+0+0=0 \text{ (v)}$$

$$A+4B+9C+D+6E+10F = A+4B+9C$$
$$-A+\tfrac{2}{5}B+3C$$
$$+6\left(-\tfrac{2}{5}B+2C\right)$$
$$+10\left(-\tfrac{1}{5}B\right)$$
$$= 0+0+0=0 \text{ (v)}$$