DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 27 febbraio 2023

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.
I compiti corretti saranno a disposizione mercoledì 6 giugno, alle 12.30, al 1º piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{z^2+4}{z^4-1}\,dz$$

B. Siano $A, B > 0$ parametri fissi. Si consideri il triangolo $\mathcal{T}'$ con vertici $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}A\\0\end{smallmatrix}\right)$, e $\left(\begin{smallmatrix}0\\B\end{smallmatrix}\right)$. Disegnare $\mathcal{T}'$ e poi calcolare la media di xy su $\mathcal{T}'$.

C. Sia $R > 0$ un parametro fisso. Sia $\mathcal{S}_2$ la sfera di raggio R con centro a $\begin{pmatrix}0\\R\\0\end{pmatrix}$. Usare le coordinate sferiche e calcolare la media di $(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = 1/r$ su $\mathcal{S}_2$.

D. Poniamo che i valori dei parametri P, Q, R, e S siano noti. (Questo non vuol dire che tocca a noi scegliere quei valori. Ad esempio non possiamo decidere che $P = 1$.) Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare la soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} Pu + Qv &= 1 \\ Ru + Sv &= 0 \end{aligned}$$

per le incognite u e v.

$\boxed{A}$ $z^4 - 1 = (z^2)^2 - 1$

$= (z^2 - 1)(z^2 + 1)$

$= (z-1)(z+1)(z^2+1)$

$$\frac{z^2+4}{z^4-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z^2+1} + \frac{D(2z)}{z^2+1}$$

$z^2 + 4 = A(z+1)(z^2+1) + B(z-1)(z^2+1)$

$+ C(z-1)(z+1) + D(2z)(z-1)(z+1)$

$z = 1 \rightsquigarrow 1^2 + 4 = A(1+1)(1^2+1) + 0 + 0 + 0$

$\rightsquigarrow 5 = 4A \rightsquigarrow A = 5/4$

$z = -1 \rightsquigarrow (-1)^2 + 4 = 0 + B(-1-1)((-1)^2+1)$

$\rightsquigarrow 5 = -4B \rightsquigarrow B = -5/4$

$\rightarrow z^2 + 4 = A(z^3 + z^2 + z + 1)$

$+ B(z^3 - z^2 + z - 1)$

$+ C(\quad z^2 \quad -1)$

$+ D(2z^3 \quad -2z \quad)$

2/11

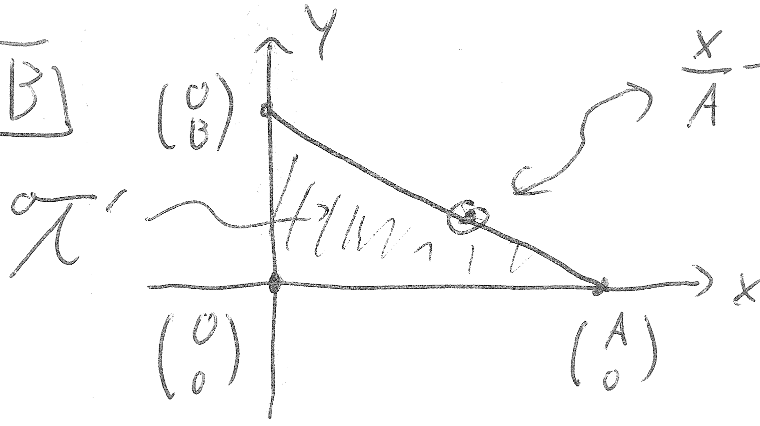
$$\begin{cases} A+B+2D=0 \\ A-B+C=1 \\ A+B-2D=0 \\ A-B-C=4 \end{cases} \to \begin{cases} 0+2D=0 \\ 5/2+C=1 \\ 0-2D=0 \\ 5/2-C=4 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} D=0 \\ C=-3/2 \end{cases}$$

$$\int \frac{z^2+4}{z^4-1}\,dz = \int \frac{5}{4}\frac{1}{z-1} - \frac{5}{4}\frac{1}{z+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{z^2+1}\,dz$$

$$= \frac{5}{4}\log(z-1) - \frac{5}{4}\log(z+1) - \frac{3}{2}\arctan(z)$$

$\boxed{B}$



$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$$

$$\to y = B - \frac{Bx}{A}$$

3/11

$$\iint_{T'} 1 \, dA = \int_{x=0}^{A} \left(\int_{y=0}^{B-\frac{Bx}{A}} 1 \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{A} B - \frac{Bx}{A} \, dx$$

$$= BA - \frac{B}{A}\left(\frac{A^2}{2}\right) = BA - \frac{BA}{2}$$

$$= \frac{BA}{2} \quad \text{(l'area di } T'\text{)}$$

$$\iint_{T'} xy \, dA = \int_{x=0}^{A} \left(\int_{y=0}^{B-\frac{B}{A}x} xy \, dy \right) dx$$

$$= \int_{x=0}^{A} x \cdot \frac{1}{2}\left(B - \frac{B}{A}x\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{A} B^2 x - \frac{2B^2}{A} x^2 + \frac{B^2}{A^2} x^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} B^2 \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} \frac{2B^2}{A} \frac{1}{3} A^3 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{4} A^4$$

4/11

$$= \frac{1}{4} B^2 A^2 - \frac{1}{3} B^2 A^2 + \frac{1}{8} B^2 A^2$$

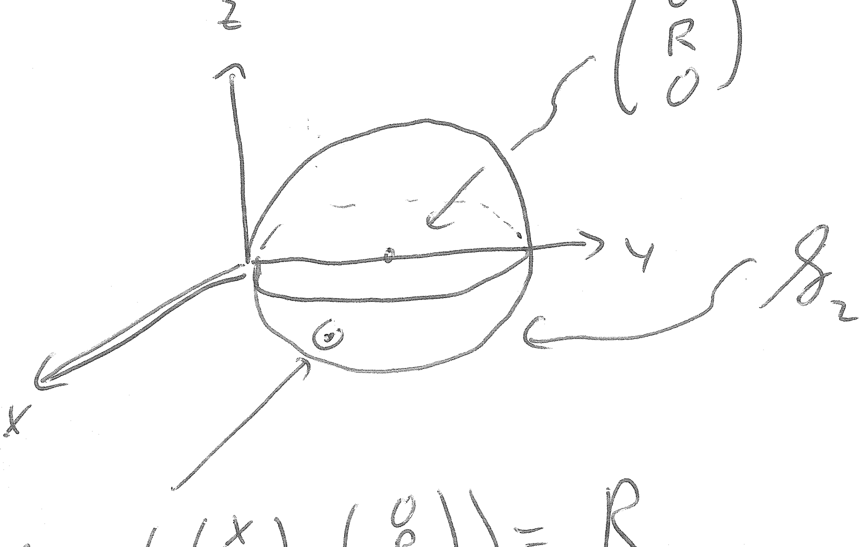
$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right) B^2 A^2 = \frac{6-8+3}{24} B^2 A^2$$

$$= \frac{1}{24} B^2 A^2$$

$$\overline{xy} = \frac{\iint_{\Omega'} xy\, dA}{\iint_{\Omega'} 1\, dA} = \frac{B^2 A^2/24}{BA/2}$$

$$= \boxed{\frac{BA}{12}}$$

$\boxed{C}$



$$\mathrm{dist}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}\right) = R$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-R)^2 + (z-0)^2} = R$$

$$\hookrightarrow x^2+y^2-2yR+R^2+z^2=R^2$$

$$\hookrightarrow x^2+y^2+z^2=2yR$$

$$\hookrightarrow \rho^2 = 2\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \, R$$

$$\hookrightarrow \rho = 2R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

I punti dentro la sfera soddisfano

$$\rho \leq 2R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

C'è sempre $0 \leq \rho$. Occorre

$$0 \leq 2R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$\hookrightarrow 0 \leq \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$\hookrightarrow 0 \leq \operatorname{sen}\varphi \quad (\text{poiché } 0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$\hookrightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi$$

6/11

$$\iiint_{S_2} I \, dV$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{2R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi} 1 \cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{3} (2R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)^3 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= \frac{8R^3}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}^3\varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^4\theta \, d\theta \right) d\varphi$$

$$\Big\lceil \int_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = -\cos\varphi \Big]_{\varphi=0}^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$$

$$\int_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}^3\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{3} \cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi \Big]_{\varphi=0}^{\pi} + \frac{2}{3} \int_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}^1\varphi \, d\varphi$$

$$= 0 + \frac{2}{3} \cdot 2 = 4/3$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} 1\, d\theta = \pi$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\operatorname{sen}^0\theta\, d\theta$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{\theta=0}^{\pi}\operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

$$= 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\pi = \frac{3}{8}\pi$$

$\rfloor$

$$\iiint_{S_2} 1\, dV = \frac{8R^3}{3}\int_{\varphi=0}^{\pi}\operatorname{sen}^3\varphi\cdot\frac{3}{8}\pi\, d\varphi$$

$$= \frac{8R^3}{3}\cdot\frac{3}{8}\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3}R^3$$

(il volume della sfera)

$$\iiint_{S_2}\frac{1}{\rho}\, dV = \int_{\varphi=0}^{\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{\rho=0}^{2R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}\frac{1}{\rho}\cdot\rho^2\operatorname{sen}\theta\, d\rho\right)d\theta\right)d\varphi$$

8/11

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1}{2} (2R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi)^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2R^2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}^2\varphi \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta \, d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2R^2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \operatorname{sen}^2\varphi \cdot \frac{4}{3} \, d\varphi$$

$$= 2R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3} R^2$$

$$\overline{\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\iiint_{B_2} \frac{1}{r} \, dV}{\iiint_{B_2} 1 \, dV} = \frac{4\pi/3 \cdot R^2}{4\pi/3 \cdot R^3}$$

$$= \frac{1}{R}$$

$\boxed{D}$

u	v	=
P	Q	1
R	S	0

9/11

$E1 \leftarrow 1/P \cdot E1$

$$\begin{matrix} 1 & Q/P & 1/P \\ R & S & 0 \end{matrix}$$

$E2 \leftarrow E2 - RE1$

$$\begin{matrix} 1 & Q/P & 1/P \\ 0 & S - R(Q/P) & -R/P \end{matrix}$$

$$S - R(Q/P) = \frac{SP - RQ}{P}$$

$$\begin{matrix} 1 & Q/P & 1/P \\ 0 & (SP-RQ)/P & -R/P \end{matrix}$$

$E2 \leftarrow P/(SP-RQ) \cdot E2$

$$\begin{matrix} 1 & Q/P & 1/P \\ 0 & 1 & -R/(SP-RQ) \end{matrix}$$

$E1 \leftarrow E1 - \frac{Q}{P} \cdot E2$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1/P + \frac{QR}{P} \cdot \frac{1}{(SP-RQ)} \\ 0 & 1 & -R/(SP-RQ) \end{matrix}$$

10/11

$$\left[\frac{1}{P} + \frac{QR}{P} \, \frac{1}{(SP-RQ)} \right.$$

$$= \frac{SP-RQ+QP}{P(SP-RQ)} = \frac{SP}{P(SP-RQ)}$$

$$\left. = S/(SP-RQ) \right]$$

u	v	$=$
1	0	$S/(SP-RQ)$
0	1	$-R/(SP-RQ)$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= S/(SP-RQ) \\ v &= -R/(SP-RQ) \end{aligned}}$$

<u>Controllo</u>:

$$Pu + Qv = \frac{PS}{SP-RQ} - \frac{QR}{SP-RQ}$$

$$= \left(\frac{SP-RQ}{SP-RQ} \right) = 1 \ ✓$$

11/11

$$Ru + Sv = \frac{RS}{(SP - RQ)} - \frac{SR}{(SP - RQ)} = 0$$ ✓