DA FOTOCOPIARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 6 febbraio 2023

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.
I compiti corretti saranno a disposizione mercoledì 6 giugno, alle 12.30, al 1° piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\phi \qquad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{1}{(s^2+1)^3}\,ds$$

B. Sia $H > 1$ un parametro fisso. Sia $\mathcal{P}$ la forma definita da:

$$x^2 + y^2 + 1 \le z \le H$$

Usare le coordinate cilindriche e calcolare il volume di $\mathcal{P}$.

C. Sia $R > 0$ un parametro fisso. Sia $\mathcal{S}_3$ la sfera di raggio R con centro a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$. Usare le coordinate sferiche e calcolare la media di $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = 1/r$ su $\mathcal{S}_3$.

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$
\begin{array}{rrrrl}
a & +3b & +6c & +10d & = 4 \\
3a & +6b & +10c & +15d & = 1 \\
6a & +10b & +15c & +21d & = 0 \\
10a & +15b & +21c & +28d & = 1
\end{array}
$$

(Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, il solo denominatore che appare è “3”.)

$1/8$

$\boxed{A}$ $s = tg\, x \qquad ds = sec^2 x\, dx$

$s^2+1 = tg^2 x + 1 = sec^2 x$

$$\int \frac{1}{(s^2+1)^3}\, ds = \int \frac{1}{(sec^2 x)^3}\, sec^2 x\, dx$$

$$= \int \frac{1}{sec^4 x}\, dx = \int cos^4 x\, dx$$

$$= \frac{1}{4} sen\, x\, cos^3 x + \frac{3}{4} \int cos^2 x\, dx$$

$$= \frac{1}{4} sen\, x\, cos^3 x + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} sen\, x \cos x + \frac{1}{2} \int cos^0 x\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{4} sen\, x\, cos^3 x + \frac{3}{8} sen\, x \cos x + \frac{3}{8} x$$

Si calcola

$cos^2 x = 1/sec^2 x = 1/(s^2+1)$

$sen\, x \cos x = \frac{sen\, x}{cos\, x} cos^2 x = tg\, x\, cos^2 x = \frac{s}{s^2+1}$

$x = arctg\, s$

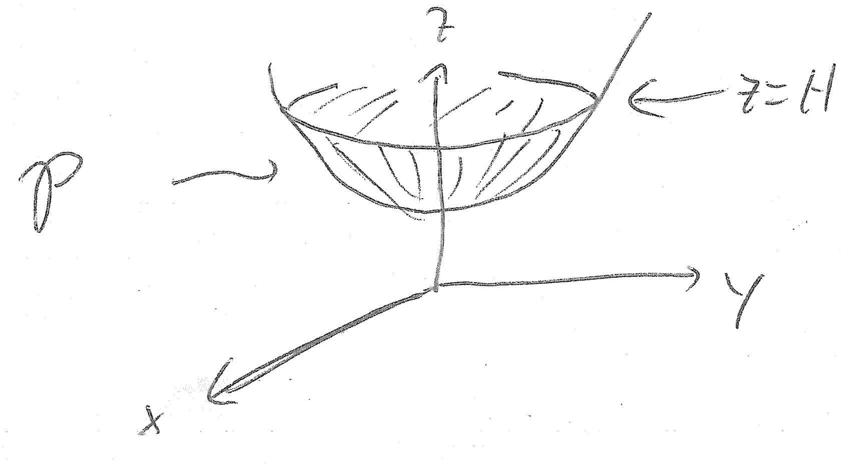
onde

$$\int \frac{1}{(s^2+1)^3}\,ds = \frac{1}{4}\,\frac{s}{(s^2+1)^2} + \frac{3}{8}\,\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{8}\,\operatorname{arctg} s$$

$\boxed{B}$ $x^2+y^2+1 \le z \le H \rightsquigarrow r^2+1 \le z \le H$

Il limite superiore per r:

$r^2+1 \le H \rightsquigarrow r^2 \le H-1 \rightsquigarrow r \le \sqrt{H-1}$



$$\mathrm{vol}(P) = \iiint_P 1\,dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{r=0}^{\sqrt{H-1}} \left(\int_{z=r^2+1}^{H} r\,dz \right) dr \right) d\theta$$

3/8

$$= 2\pi \left(\int_{r=0}^{\sqrt{H-1}} r\,(H-(r^2+1))\,dr \right)$$

$$= 2\pi \int_{r=0}^{\sqrt{H-1}} (H-1)r - r^3\,dr$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2}(H-1)(\sqrt{H-1})^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{H-1})^4 \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2}(H-1)^2 - \frac{1}{4}(H-1)^2 \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{4}(H-1)^2 \right) = \frac{\pi}{2}(H-1)^2$$

$\boxed{C}$ $dist((x,y,z),(0,0,R)) \leq R$

$\hookrightarrow ((x-0)^2+(y-0)^2+(z-R)^2)^{1/2} \leq R$

$\hookrightarrow (x^2+y^2+z^2-2zR+R^2) \leq R^2$

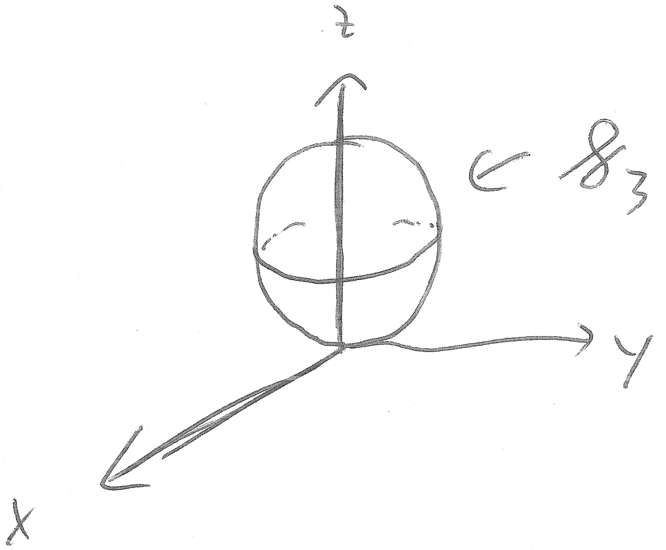
$\hookrightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 2zR$

$\hookrightarrow r^2 \leq 2r\cdot\cos\theta\cdot R \rightsquigarrow r \leq 2R\cos\theta$

$\boxed{4/8}$

Il limite superiore per θ:

$$0 \leq 2R\cos\theta \rightarrow 0 \leq \cos\theta \rightarrow \theta \leq \frac{\pi}{2}$$



$$\iiint_{S_3} 1\, dV = \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{2R\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{(2R\cos\theta)^3}{3} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \right)$$

$$= \frac{16\pi R^3}{3} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{16\pi R^3}{3} \left(-\frac{\cos^4\theta}{4} \right) \Big]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

5/8

$$\iiint_{S_3} \frac{1}{r}\, dV = \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{2R\cos\theta} \frac{1}{r}\, r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{2R\cos\theta} r\, dr \right) \operatorname{sen}\theta \; d\theta$$

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{(2R\cos\theta)^2}{2} \operatorname{sen}\theta \; d\theta$$

$$= 4\pi R^2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= 4\pi R^2 \left(-\frac{\cos^3\theta}{3} \right) \Bigg]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{4\pi R^2}{3}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\iiint_{S_3} 1/r \, dV}{\iiint_{S_3} 1 \, dV} = \frac{4\pi R^2/3}{4\pi R^3/3}$$

$$= \frac{1}{R}$$

6/8

a	b	c	d	=
1	3	6	10	4
3	6	10	15	1
6	10	15	21	0
10	15	21	28	1

$E2 \leftarrow E2 - 3E1$
$E3 \leftarrow E3 - 6E1$
$E4 \leftarrow E4 - 10E1$

1	3	6	10	4
0	-3	-8	-15	-11
0	-8	-21	-39	-24
0	-15	-39	-72	-39

$E2 \leftarrow E2/3$

1	3	6	10	4
0	1	8/3	5	11/3
0	-8	-21	-39	-24
0	-15	-39	-72	-39

$E1 \leftarrow E1 - 3E2$
$E3 \leftarrow E3 + 8E2$
$E4 \leftarrow E4 + 15E2$

1	0	-2	-5	-7
0	1	8/3	5	11/3
0	0	1/3	1	16/3
0	0	1	3	16

$E3 \leftarrow 3E3$

7/8

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5 & 11/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 16 \end{matrix}$$

$E1 \leftarrow E1 + 2E3$

$E2 \leftarrow E2 - 8/3\, E3$

$E4 \leftarrow E4 - E3$

a	b	c	d	=
1	0	0	1	25
0	1	0	-3	-39
0	0	1	3	16
0	0	0	0	0

$a + d = 25$

$b - 3d = -39$

$c + 3d = 16$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d + 25 \\ 3d - 39 \\ -3d + 16 \\ d \end{pmatrix}$$

$$= d \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -39 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Controllo:

$$a+3b+6c+10d = \begin{aligned}&(-d+25)\\&+3(3d-39)\\&+6(-3d+16)\\&+10(d)\end{aligned} = 0d+4=4$$

$$3a+6b+10c+15d = \begin{aligned}&3(-d+25)\\&+6(3d-39)\\&+10(-3d+16)\\&+15(d)\end{aligned} = 0d+1=1$$

$$6a+10b+15c+21d = \begin{aligned}&6(-d+25)\\&+10(3d-39)\\&+15(-3d+16)\\&+21(d)\end{aligned} = 0d+0=0$$

$$10a+15b+21c+28d = \begin{aligned}&10(-d+25)\\&+15(3d-39)\\&+21(-3d+16)\\&+28(d)\end{aligned} = 0d+1=1$$