DA SCANNERIZZARE

Matematica 2, Laurea Triennale (Steger)

Prova Scritta di 28 settembre 2022

Imponiamo alcune *regole fiscali* affinché, in coscienza, si possa dare al candidato una buona votazione globale sulla base della prova scritta, anche quando i risultati dell'orale siano discutibili.

- La prova si affronta senza i libri e *senza le calcolatrici.* È permesso un formulario di una pagina (A4), ambedue lati, scritto a mano dallo stesso candidato.
- L'esame verrà svolto esclusivamente sui fogli messi a disposizione dal docente.

La durata della prova è di 3 ore, dalle ore 10.00 alle ore 13.00. La prova si concluderà puntualmente.
I compiti corretti saranno a disposizione mercoledì 6 giugno, alle 12.30, al 1º piano del palazzo didattico di via Vienna.

Le formule per le coordinate cilindriche sono:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad z = z \qquad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

Le formule per le coordinate sferiche sono:

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad z = r\cos\theta$$
$$dx\,dy\,dz = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

A. Calcolare

$$\int \frac{s^4}{(s^2-1)^2}\,ds$$

B. Siano R e ϵ due parametri positivi con $\epsilon < R$.

1. Usare le coordinate sferiche e calcolare

$$V_\epsilon = \iiint_{R \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R+\epsilon} 1 \, dV$$

2. Calcolare

$$\lim_{\epsilon \to 0+} V_\epsilon / \epsilon$$

3. La risposta precedente rappresenta un'area. Spiegare quale area rappresenta e soprattutto spiegare perché lo rappresenta

C. Siano $R > 0$ e $A > 0$ due parametri fissi e sia $\mathcal{E}$ l'emisfera definita da

$$z \geq 0 \qquad\qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

Usare le coordinate *cilindriche* e calcolare

$$\iiint_{\mathcal{E}} z^A \, dV$$

D. Usare il metodo di Gauss–Jordan e trovare una parametrizzazione dello spazio delle soluzioni del sistema:

$$\begin{array}{rrrrl} a & +3b & +6c & +10d & = 1 \\ 3a & +6b & +10c & +15d & = 0 \\ 6a & +10b & +15c & +21d & = 1 \\ 10a & +15b & +21c & +28d & = 4 \end{array}$$

(Indicazione: se il metodo è seguito senza errore e senza variazione, il solo denominatore che appare è "3".)

1/11

$\boxed{A}$ $(s^2-1)^2 = s^4 - 2s^2 + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
s^4 & s^4-2s^2+1 \\
\hline
s^4-2s^2+1 & 1 \\
\hline
+2s^2-1 &
\end{array}
$$

$$s^4 = 1\cdot(s^4-2s^2+1) + 2s^2-1$$

$$\frac{s^4}{(s^2-1)^2} = 1 + \frac{2s^2-1}{(s^2-1)^2}$$

$$\frac{2s^2-1}{(s^2-1)^2} = \frac{2s^2-1}{((s-1)(s+1))^2} = \frac{2s^2-1}{(s-1)^2(s+1)^2}$$

$$= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2}$$

2/11

$$2s^2-1 = A(s-1)(s+1)^2 + B(s+1)^2$$
$$+ C(s-1)^2(s+1) + D(s-1)^2$$

$$s=1 \rightsquigarrow 2\cdot 1^2-1 = 0 + B(1+1)^2 + 0 + 0$$
$$\rightsquigarrow 1 = 4B \rightsquigarrow B = 1/4$$
$$s=-1 \rightsquigarrow 2\cdot(-1)^2-1 = 0+0+0+D(-1-1)^2$$
$$\rightsquigarrow 1 = 4D \rightsquigarrow D = 1/4$$

$$2s^2-1 = A(s^2-1)(s+1) + \frac{1}{4}(s+1)^2$$
$$+ C(s^2-1)(s-1) + \frac{1}{4}(s-1)^2$$

$$= A(s^3+s^2-s-1)$$
$$+ \frac{1}{4}(\quad s^2+2s+1)$$
$$+ C(s^3-s^2-s+1)$$
$$+ \frac{1}{4}(\quad s^2-2s+1)$$

3/11

$$A + C = 0$$
$$A + \frac{1}{4} - C + \frac{1}{4} = 2$$
$$-A + \frac{1}{2} - C - \frac{1}{2} = 0$$
$$-A + \frac{1}{4} + C + \frac{1}{4} = -1$$

$\rightsquigarrow$

$$A + C = 0$$
$$A - C = 3/2$$
$$-A - C = 0$$
$$-A + C = -3/2$$

$\rightsquigarrow$ $C = -A$

$$3/2 = A - C = A - (-A) = 2A$$

$\rightsquigarrow$ $A = 3/4$

$C = -3/4$

$$\int \frac{s^4}{(s^2-1)^2}\,ds = \int \left(1 + \frac{3}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s+1)^2}\right) ds$$

$$= s + \frac{3}{4}\log(s-1) - \frac{1}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{4}\log(s+1) - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1}$$

4/11

B 1 $R \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R+\varepsilon$

$\hookrightarrow \quad R \leq r \leq R+\varepsilon$

$0 \leq \theta \leq \pi$

$-\pi \leq \varphi \leq \pi$

$$V_\varepsilon = \int_{\varphi=-\pi}^{\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=R}^{R+\varepsilon} 1\cdot r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr\right)d\theta\right)d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=-\pi}^{\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\frac{1}{3}(R+\varepsilon)^3 - \frac{1}{3}R^3\right)\operatorname{sen}\theta \, d\theta\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\left((R+\varepsilon)^3 - R^3\right)\int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \Big[-\cos\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\left((R+\varepsilon)^3 - R^3\right)\int_{\varphi=-\pi}^{\pi} 2 \, d\varphi$$

$$= \boxed{\frac{4\pi}{3}\left((R+\varepsilon)^3 - R^3\right)}$$

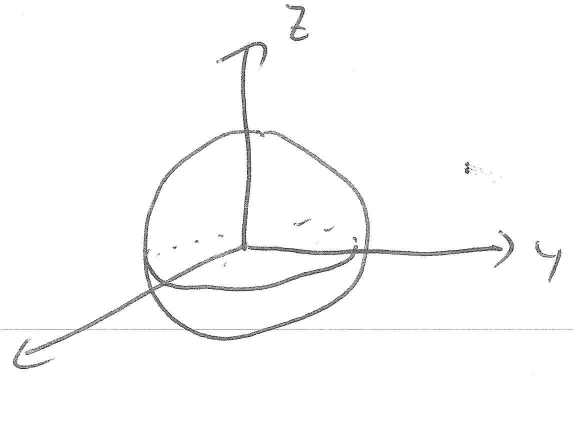
② $$V_\varepsilon/\varepsilon = \frac{4\pi}{3}\left(R^3+3R^2\varepsilon+3R\varepsilon^2+\varepsilon^3-R^3\right)/\varepsilon$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left(3R^2+3R\varepsilon+\varepsilon^2\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} V_\varepsilon/\varepsilon = \frac{4\pi}{3}\left(3R^2+0+0\right)$$

$$= 4\pi R^2$$

③ $4\pi R^2$ è l'area della sfera di raggio R.



Per ottenere V_ε, si comincia con la superficie della sfera, si estende ad una forma 3-dimensionale di spessore ε, e si calcola il volume. La risposta, V_ε, sarà approssimativamente l'area della superficie per ε. Dunque $V_\varepsilon / \varepsilon$ sarà approssimativamente l'area della superficie. Nel limite $\varepsilon \to 0+$ viene esattamente l'area della superficie.

$\boxed{C}$ $x^2+y^2+z^2 \le R^2 \rightsquigarrow r^2+z^2 \le R^2$

$$\rightsquigarrow r^2 \le R^2 - z^2 \rightsquigarrow r \le \sqrt{R^2-z^2}$$

$$r^2 \le R^2 - z^2 \rightsquigarrow 0 \le R^2 - z^2 \rightsquigarrow z^2 \le R^2$$

$$\rightsquigarrow z \le R \text{ (poiché } z \ge 0)$$

7/11

$$\iiint_E z^A \, dV$$

$$= \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(\int_{z=0}^{R} \left(\int_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} z^A \, r \, dr \right) dz \right) d\theta$$

$$= 2\pi \left(\int_{z=0}^{R} z^A \, \frac{1}{2} \left(\sqrt{R^2-z^2} \right)^2 dz \right)$$

$$= \pi \int_{z=0}^{R} z^A \left(R^2 - z^2 \right) dz$$

$$= \pi \left(\frac{R^{A+1}}{A+1} R^2 - \frac{R^{A+3}}{A+3} \right)$$

$$= \pi R^{A+3} \left(\frac{1}{A+1} - \frac{1}{A+3} \right)$$

$$= \frac{2\pi R^{A+3}}{(A+1)(A+3)}$$

8/1

a	b	c	d	=
1	3	6	10	1
3	6	10	15	0
6	10	15	21	1
10	15	21	28	4

$E2 \leftarrow E2 - 3E1$
$E3 \leftarrow E3 - 6E1$
$\longrightarrow$
$E4 \leftarrow E4 - 10E1$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & -15 & -3 \\ 0 & -8 & -21 & -39 & -5 \\ 0 & -15 & -39 & -72 & -6 \end{array} \xrightarrow{E2 \leftarrow -\frac{1}{3} E2}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5 & 1 \\ 0 & -8 & -21 & -39 & -5 \\ 0 & -15 & -39 & -72 & -6 \end{array} \xrightarrow[\substack{E3 \leftarrow E3+8E2 \\ E4 \leftarrow E4+15E2}]{E1 \leftarrow E1-3E2}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{array} \xrightarrow{E3 \leftarrow 3E3}$$

9/11

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 8/3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \end{matrix} \quad \xrightarrow[E4 \leftarrow E4 - E3]{\substack{E1 \leftarrow E1 + 2E3 \\ E2 \leftarrow E2 - 8/3\, E3}}$$

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & = \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$a + d = 16$

$b - 3d = -23$

$c + 3d = 9$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d+16 \\ 3d-23 \\ -3d+9 \\ d \end{pmatrix}$$

$$= d\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ -23 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10/11

Controllo:

$$a+3b+6c+10d = \begin{aligned}&(-d+16)\\ &+3(3d-23)\\ &+6(-3d+9)\\ &+10(d\quad)\end{aligned}$$

$$= d(-1+9-18+10)+(16-69+54)$$

$$= 0d+1 = 1 \checkmark$$

$$3a+6b+10c+15d = \begin{aligned}&3(-d+16)\\ &+6(3d-23)\\ &+10(-3d+9)\\ &+15(d\quad)\end{aligned}$$

$$= d(-3+18-30+15)+(48-138+90)$$

$$= 0d+0 = 0 \checkmark$$

$$
\begin{aligned}
6a+10b+15c+21d = \ & 6(-d+16) \\
& 10(3d-23) \\
& 15(-3d+9) \\
& 21(d \qquad)
\end{aligned}
$$

$$= d(-6+30-45+21) + (96-230+135)$$

$$= 0d + 1 = 1 \ \checkmark$$

$$
\begin{aligned}
10a+15b+21c+28d = \ & 10(-d+16) \\
& 15(3d-23) \\
& 21(-3d+9) \\
& 28(d \qquad)
\end{aligned}
$$

$$= d(-10+45-63+28) + (160-345+189)$$

$$= 0d + 4 = 4 \ \checkmark$$